BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GUIDO FUBINI

La trasformazione di Ionas delle superficie R

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.1, p. 8–10.
Unione Matematica Italiana
¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_1_8_0¿

La trasformazione di Ionas delle superficie R.

Nota di Guido Fubini

Se noi indichiamo con β e γ i simboli $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$ e $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ dell'elemento lineare di Gauss di una superficie, quando u e v sono le asintotiche, allora la forma $\beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3)$ è la forma cubica fondamentale per la geometria proiettiva differenziale delle superficie. Classi specialmente notevoli sono le *isotermo-asintotiche* (per cui si può supporre $\beta = \gamma$) e le *superficie* $R(\beta_v = \gamma_u)$. Per entrambe queste classi di superficie vale una teoria della trasformazione per congruenze W, affatto analoga alle classiche teorie del BIANCHI. A tali trasformazioni si giunge nel primo caso (FUBINI) studiando quando sulle falde focali di una congruenza si corrispondono le linee di DARBOUX ($\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$) per mezzo del teorema che in tal caso le due falde focali sono *isotermo-asintotiche* (escluso il caso banale che la congruenza appartenga a un complesso lineare). Per le superficie R vi è soltanto la teoria analitica dovuta al sig. IONAS relativa a tali trasformazioni; ora, si noti, questo caso è specialmente notevole perchè *le superficie applicabili nel senso di Gauss su una quadrica* (p. es. le superficie a curvatura costante) *sono tutte superficie* R. Alla teoria del sig. IONAS si può dare la seguente interpretazione geometrica di estrema semplicità.

1. *Sia* S *una superficie* R; *sia* $\bar{\mathrm{S}}$ *proiettivamente applicabile su* S, *e* K *la congruenza delle rette* $\bar{\rho}$ *tangenti ad* $\bar{\mathrm{S}}$ *che si appoggiano ad una retta fissa* r *dello spazio. Deformando proiettivamente* $\bar{\mathrm{S}}$ *su* S, *in modo che ogni elemento di* $\bar{\mathrm{S}}$ *porti con sè il raggio* $\bar{\rho}$ *che ne esce della congruenza* K, *i punti che primitivamente stavano sulla retta* r *riempiono una superficie* S'. *Le nuove posizioni* ρ *dei raggi* $\bar{\rho}$ *formano una nuova congruenza* K, *di cui precisamente* S *ed* S' *sono le due falde focali. Anche la superficie* S' *è una superficie* R; *e la* K *è una delle congruenze del sig. Ionas. Il problema di costruire le trasformate per congruenze* W *di una superficie* R *è ridotto a quello della deformazione proiettiva di queste; da ogni coppia di superficie* R *applicabili si deducono così con sole derivazioni due sistemi di* ∞^4 *congruenze di Ionas.*

2. Siano H ed H' due congruenze, le cui rette r ed r' sono in corrispondenza biunivoca; esista un sistema di ∞^1 superficie S, che le sviluppabili di H tagliano in un sistema coniugato, tali che il piano tangente ad una S nel punto in cui incontra una retta r contiene la retta omologa r'. Allora tra le due congruenze le sviluppabili si corrispondono, e un piano focale di r contiene il fuoco non omologo di r'. E reciprocamente, se ciò avviene, si può costruire il sistema di superficie S. Supponiamo in più che esista viceversa un sistema di ∞^1 superficie S' tali che il piano tangente ad una S' nel punto in cui incontra una r' contenga la retta r. Allora si dimostra che le quattro falde focali di H, H' sono superficie R, le quali, a due a due, sono falde focali di una stessa congruenza W, che è precisamente una congruenza di IONAS, e i sistemi coniugati, immagine delle sviluppabili di H, H' sono *isotermo-coniugati.*

Ecco l'unico caso possibile in cui le trasformate di LAPLACE delle falde focali di una congruenza W rispetto a un sistema coniugato, che non sia quello corrispondente alle sviluppabili di una tale congruenza, formano ancora una congruenza W.

La teoria delle trasformazioni delle superficie R viene così illustrata anche da un punto di vista geometrico nel modo più semplice possibile; e naturalmente a ciò corrispondono nuove e semplicissime trattazioni analitiche di tali trasformazioni.

Lo sviluppo completo di questi teoremi è lasciato ad una breve Memoria, che è in corso di stampa negli *Annali di Matematica.*