Bollettino Unione Matematica Italiana

Giuseppe Vitali

Sulla misura dei gruppi di punti di una retta

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.1, p. 1–8.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_1_1_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1924.

PICCOLE NOTE

Sulla misura dei gruppi di punti di una retta.

Nota di GIUSEPPE VITALI

In un recente lavoro [1] il signor STEFAN BANACH ha dimostrato che è possibile far corrispondere ad ogni gruppo limitato G di punti di una retta r un numero reale $m(G) \geq 0$ che gode le seguenti proprietà:

a) Se G *è misurabile secondo* LEBESGUE, m(G) *coincide colla misura lebesgiana di* G.

b) Se G *è* G' *sono sovrapponibili per una traslazione, è* m(G) = m(G').

c) Se G *e* G' *sono distinti, è* m(G + G') = m(G) + m(G').

Un sistema di tali numeri $m(G)$ lo chiameremo un *sistema di misure secondo* BANACH.

In quel che segue immagineremo di aver fissato un particolar sistema di questa fatta e di riferirci sempre ad esso.

Se G è un gruppo qualunque di punti di r, ed a è un particolar punto di r, la funzione $m(x)$ che è nulla per $x = a$, che per $x > a$ è la misura del sottogruppo di G che cade in (a, x), e per $x < a$ è la contraria della misura del sottogruppo di G che cade in (x, a), ha la proprietà che, *qualunque sia l'intervallo* (b, c), b < c, *la misura del sottogruppo di* G *che cade in* (b, c) *è uguale ad* m(c) — m(b).

Una funzione che gode questa proprietà si chiamerà una **mensurale** di G.

Si vede subito che *la differenza di due mensurali di un medesimo gruppo è costante* e che *se ad una mensurale di un gruppo si aggiunge una costante si ha una mensurale dello stesso gruppo.*

Per la proprietà *c) la misura di un gruppo limitato non supera la lunghezza di un segmento che lo contenga.*

[1] STEFAN BANACH: *Sur le problème de la mesure.* « Fundamenta Mathematicae. Tom. IV, 1923, pp. 7-33.

Consegue che se $m(x)$ è la mensurale di un gruppo G, deve essere per ogni x e per ogni h

$$(1) \qquad 0 \leq \frac{m(x+h) - m(x)}{h} \leq 1.$$

Di qui consegue che *ogni mensurale è una funzione assolutamente continua.*

Dunque *una mensurale ha in generale* [1] *derivata.* Inoltre *questa derivata*, dove esiste, *è compresa fra* 0 *ed* 1.

Nel presente lavoro io dimostro che la proprietà (1) è caratteristica delle mensurali, o, in altri termini, *se* m(x) *è una funzione che soddisfa le condizioni* (1), *esiste un gruppo* G *di cui* m(x) *è una mensurale.*

Dimostro inoltre che *se il gruppo dei punti in cui* m(x) *non ha derivata* 0 *o* 1 *è di misura* (necessariamente lebesgiana) *nulla, il gruppo dei punti in cui* $\frac{dm(x)}{dx} = 1$ *differisce dal gruppo dato per un gruppo di punti di mensurale nulla* (costante).

1. Se x è un punto di r, indico con $A_{1,x}$ l'insieme dei punti

$$x + \frac{p}{3^n}$$

e con $B_{1,x}$ l'insieme dei punti

$$x + \frac{2p+1}{2 \cdot 3^n},$$

dove p è un intero qualunque $\gtreqless 0$ ed n è un intero qualunque ≥ 0.

I gruppi $A_{1,x}$ e $B_{1,x}$ sono distinti. Il punto x appartiene ad $A_{1,x}$, ma non a $B_{1,x}$. Una traslazione della retta di ampiezza $\frac{2p+1}{2 \cdot 3^n}$ trasporta $A_{1,x}$ su $B_{1,x}$ e viceversa, una traslazione di ampiezza $\frac{p}{3^n}$ trasporta $A_{1,x}$ su se stesso e $B_{1,x}$ su se stesso.

Poniamo

$$C_{1,x} = A_{1,x} + B_{1,x}.$$

Due gruppi $C_{1,x}$ o coincidono o non hanno punti in comune. Consideriamo l'insieme dei gruppi $C_{1,x}$ distinti e in ciascuno scegliamo un punto. Tutti questi punti formano un gruppo H. Sia A_1 la somma di tutti gli $A_{1,x}$ corrispondenti ai vari punti x di H, e sia B_1 la somma di tutti i $B_{1,x}$ corrispondenti pure ai

[1] Cioè escluso al più un gruppo lebesgiano di misura nulla.

vari punti x di H. Il gruppo $A_1 + B_1$ è l' insieme di tutti i punti di r. Siano $a_1(x)$, $b_1(x)$ le mensurali di A_1, B_1 che si annullano per $x = 0$. Sarà

(1) $$a_1(x) + b_1(x) = x.$$

Una traslazione di ampiezza $\frac{1}{2 \cdot 3^n}$ porta A_1 in B_1 e, più precisamente, il sottogruppo di A_1 che cade in $(0, x)$ nel sottogruppo di B_1 che cade in $\left(\frac{1}{2 \cdot 3^n},\ x + \frac{1}{2 \cdot 3^n}\right)$, dunque

$$a_1(x) = b_1\left(x + \frac{1}{2 \cdot 3^n}\right) - b_1\left(\frac{1}{2 \cdot 3^n}\right).$$

La $b_1(x)$ è continua. Passando al limite per $n = \infty$ si ha allora

$$a_1(x) = b_1(x),$$

e, combinando con (1),

$$a_1(x) = b_1(x) = \frac{x}{2}.$$

Indichiamo ora con $A_{2,x}$ l' insieme dei punti

$$x + \frac{2p}{3^n}$$

e con $B_{2,x}$ l' insieme dei punti

$$x + \frac{2p+1}{3^n},$$

dove p è un intero qualunque $\lesseqgtr 0$ ed n è un intero qualunque ≥ 0.

Se A_2 è la somma di tutti gli $A_{2,x}$ corrispondenti ai vari x di H ed $a_2(x)$ è la sua mensurale annullantesi per $x = 0$, se B_2 è la somma di tutti i $B_{2,x}$ corrispondenti ai vari x di H e $b_2(x)$ è la sua mensurale annullantesi per $x = 0$, si dimostra, come precedentemente, che

$$a_2(x) = b_2(x) = \frac{a_1(x)}{2} = \frac{x}{2^2},$$

ed è $A_2 + B_2 = A_1$.

In modo analogo indicando con $A_{3,x}$ l' insieme dei punti

$$x + \frac{2 \cdot 2p}{3^n}$$

e con $B_{3,x}$ l' insieme dei punti

$$x + \frac{2(2p+1)}{3^n},$$

con p intero $\gtrless 0$ ed n intero ≥ 0, e con A_3 la somma degli $A_{3,x}$ e con B_3 la somma dei $B_{3,x}$ relativi ai punti x di H, e con $a_3(x)$, $b_3(x)$ le mensurali di A_3, B_3 che si annullano per $x=0$, si ha $A_3 + B_3 = A_2$ e

$$a_3(x) = b_3(x) = \frac{a_2(x)}{2} = \frac{x}{2^3}.$$

Continuando, si formano le successioni dei gruppi

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \ldots$$
$$B_1, \quad B_2, \quad B_3, \quad B_4, \ldots,$$

le cui mensurali annullantisi per $x=0$ sono

$$\frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2^2}, \quad \frac{x}{2^3}, \quad \frac{x}{2^4}, \ldots$$

I gruppi

$$B_1, \quad B_2, \quad B_3, \quad B_4, \ldots$$

sono a due a due distinti, inoltre si ha

$$\begin{aligned}
&A_1 + B_1 = \text{gruppo di tutti i punti di } r\\
&A_2 + B_2 = A_1\\
&A_3 + B_3 = A_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_n + B_n = A_{n-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ogni punto di un $A_{1,x}$ diverso da x è della forma

$$x + \frac{p}{3^n} \qquad (p \lessgtr 0).$$

Se 2^t è la massima potenza di 2 contenuta in p, è $p = 2^t(2s+1)$, dove s è un intero $\gtrless 0$, e quindi

$$x + \frac{p}{3^n} = x + \frac{2^t(2s+1)}{3^n},$$

il che prova che il punto in discorso appartiene a $B_{t+2,x}$.

Invece il punto x appartiene ad ogni $A_{p,x}$. Si conclude che i gruppi

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \ldots$$

hanno per punti comuni tutti e soli i punti di H. Allora

$$H + \sum_{1}^{\infty}{}_n B_n$$

costituisce l'insieme di tutti i punti di r.

Si vede subito che $\sum_{1}^{\infty}{}_n B_n$ ha per mensurale x e che quindi H ha per mensurale *zero* (costante). Che H debba avere per mensurale zero si vede anche direttamente seguendo un ragionamento analogo a quello da me usato per provare che pei gruppi di punti della retta, il problema della misura in senso stretto non si può risolvere (¹).

2. Sia G un gruppo lebesgiano e sia $m(x)$ la mensurale di G che si annulla per $x = 0$. La $m(x)$ ha generalmente in G derivata 1. Sia Γ il gruppo dei punti di G in cui $\frac{dm(x)}{dx} = 1$. Indico con A_n', B_n' le intersezioni di A_n e B_n con G e con $a_n'(x)$, $b_n'(x)$ le mensurali di A_n', B_n' annullantisi per $x = 0$, $(n = 1, 2, 3,...)$.

Poichè A_n' e B_n' sono sottogruppi di A_n e B_n e questi hanno $\frac{x}{2^n}$ per mensurale, le funzioni $a_n'(x)$, $b_n'(x)$ hanno tutti i rapporti incrementali $\leq \frac{1}{2^n}$. Dico che nei punti di Γ hanno derivata uguale ad $\frac{1}{2^n}$.

Intanto

$$a_1'(x) + b_1'(x) = m(x)$$

perchè $A_1' + B_1' = G$, ed essendo i rapporti incrementali di $a_1'(x)$, $b_1'(x)$ sempre $\leq \frac{1}{2}$, ed avendo $m(x)$ in Γ derivata 1, le $a_1'(x)$, $b_1'(x)$ hanno in Γ derivata $\frac{1}{2}$.

Analogamente è

$$a_2'(x) + b_2'(x) = a_1'(x),$$

inoltre $a_2'(x)$, $b_2'(x)$ hanno rapporti incrementali $\leq \frac{1}{2^2}$, ed $a_1'(x)$ ha

(¹) Giuseppe Vitali. *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta.* Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1905.

in l' derivata $\frac{1}{2}$, dunque $a_2'(x)$, $b_2'(x)$ devono avere in l' derivata $\frac{1}{2^2}$ e così via.

3. Sia $m(x)$ una funzione per cui, qualunque siano x ed h, si abbia

$$0 \leq \frac{m(x+h) - m(x)}{h} \leq 1.$$

Indico con Ω il gruppo dei punti in cui $m(x)$ ha derivata.

Per ogni intero $n > 0$ e per ogni intero $p > 0$ e $\leq 2^n$ si indichi con $\Omega_{p,n}$ il gruppo dei punti in cui la derivata di $m(x)$ soddisfa alle disuguaglianze

$$\frac{p-1}{2^n} \leq \frac{dm(x)}{dx} < \frac{p}{2^n}, \quad \text{se } p < 2^n,$$

e alle disuguaglianze

$$\frac{p-1}{2^n} \leq \frac{dm(x)}{dx} \leq \frac{p}{2^n}, \quad \text{se } p = 2^n.$$

Evidentemente per ogni n si ha

$$\sum_{p=1}^{2^n} \Omega_{p,n} = \Omega$$

e i gruppi $\Omega_{p,n}$ sono lebesgiani.

Indico, come si usa, con la notazione di prodotto l'intersezione di due gruppi e pongo

$$P_n = \sum_{s=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{2^{s-1}} \Omega_{2k,s}\Big) B_s$$

$$Q_n = \sum_{s=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{2^{s-1}} \Omega_{2k-1,s}\Big) B_s,$$

$$P = \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{2^{s-1}} \Omega_{2k,s}\Big) B_s,$$

$$Q = \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{2^{s-1}} \Omega_{2k-1,s}\Big) B_s.$$

È

$$P+Q=\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{2^s}\Omega_{p,s}\right)B_s,$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\Omega B_s=\Omega\sum_{s=1}^{\infty}B_s,$$

$$=\Omega-\Omega H.$$

Quindi

$$P+\Omega H=\Omega-Q.$$

Il gruppo H ha mensurale nulla, dunque anche $\Omega\cdot H$ ha mensurale nulla e P ed $\Omega-Q$ hanno ugual mensurale $\mu(x)$.

La mensurale $\mu_n(x)$ di P_n ha generalmente in $\Omega_{p,n}$ derivata uguale a $\frac{p-1}{2^n}$, perchè, posto

$$E_{t,n}=\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\dots+\alpha_nB_n$$

per ogni intero positivo $t<2^n$, se

$$t=\alpha_1 2^{n-1}+\alpha_2 2^{n-2}+\dots+\alpha_{n-1}2+\alpha_n$$

con le α_r uguali a *zero* o ad *uno*, si ha

$$P_n=\sum_{p=1}^{2^n}\Omega_{p,n}E_{p-1,n}.$$

La mensurale $\nu_n(x)$ di $\Omega-Q_n$ ha generalmente in $\Omega_{p,n}$ derivata uguale a $\frac{p}{2^n}$, perchè si ha

$$\Omega-Q_n=\sum_{p=1}^{2^n-1}\Omega_{p,n}E_{p,n}+\Omega_{2^n,n}.$$

Dunque generalmente in Ω la $\mu_n(x)$ ha derivata $\geq\frac{dm(x)}{dx}-\frac{1}{2^n}$ e la $\nu_n(x)$ ha derivata $\leq\frac{dm(x)}{dx}+\frac{1}{2^n}$. Ma il rapporto incrementale di $\mu(x)$ è sempre compreso fra i rapporti incrementali di $\mu_n(x)$ e $\nu_n(x)$ qualunque sia n, dunque $\mu(x)$ ha in Ω generalmente derivata uguale a $\frac{dm(x)}{dx}$. Consegue che $\mu(x)$ od $m(x)$ differiscono per una costante, ossia che $m(x)$ è una mensurale di P. Dunque *ogni* *funzione* $m(x)$ *per cui*

$$0 \leq \frac{m(x+h) - m(x)}{h} \leq 1$$

è una mensurale.

4. Due gruppi possono avere la stessa mensurale ed essere completamente distinti. Così avviene per A_1 e B_1 i quali sono distinti ed hanno la stessa mensurale $\frac{x}{2}$.

Se $m(x)$ è mensurale di un gruppo lebesgiano essa ha generalmente derivata 1 o 0. Supponiamo che la mensurale $m(x)$ di un gruppo G si comporti come la mensurale di un gruppo lebesgiano, ossia che $m(x)$ abbia derivata generalmente 0 od 1. Indico con Γ_0 il gruppo dei punti in cui $\frac{dm(x)}{dx} = 0$ e con Γ_1 il gruppo dei punti in cui $\frac{dm(x)}{dx} = 1$. Evidentemente la $m(x)$ è mensurale di Γ_1.

I gruppi G e Γ_1 hanno un gruppo comune K. Pongo $D = G - K$. La mensurale di D ha in Γ_0 derivata nulla perchè D è sottogruppo di G, ed ha anche in Γ_1 derivata nulla perchè D è distinto da Γ_1 e la mensurale di Γ_1 ha in Γ_1 derivata 1.

Dunque la mensurale di D ha derivata generalmente nulla, ossia è una costante. Consegue che G e K hanno ugual mensurale e perciò che $\Gamma_1 - K$ ha mensurale nulla, e si può concludere che i punti di G e Γ_1 che non sono comuni ad entrambi formano un gruppo di mensurale nulla (costante), ossia che *se un gruppo G ha mensurale con derivata generalmente* 0 *ed* 1, *esiste un gruppo* Γ_1 *lebesgiano che differisce da* G *per un gruppo (non necessariamente lebesgiano) di misura nulla.*