Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: R. Occhipinti, C. Mineo, F. Tricomi, G. Sansone, G. Usai, R. Ariano

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (1924), n.1, p. 19–25.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1924_1_3_1_19_0¿

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1924.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

R. Occhipinti: *Sulle superficie che hanno i raggi principali di curvatura in un rapporto costante.* (In corso di pubblicazione nel « Rendiconto del Circolo Matematico di Palermo », 1924).

Studio le superficie (S) che hanno i raggi principali di curvatura in rapporto costante, le riferisco alle linee di curvatura e trovo la forma caratteristica dell'elemento lineare, indi dimostro che: « Affinchè alle linee caratteristiche di una superficie corri-« spondano, sulle due falde dell'assoluta, le assintotiche, occorre « e basta che la superficie sia una S ».

Questa corrispondenza mi induce a considerare i sistemi coniugati nell'involuzione che ha per raggi doppi le direzioni delle linee caratteristiche (sistemi anticoniugati). Trovo la condizione di anticoniugio di due direzioni e dimostro che: « I soli doppi « sistemi i cui angoli, nella rappresentazione sferica si conser-« vano o si cangiano nei supplementari sono i coniugati e gli « anticoniugati ».

Ne deduco che: « Le superficie S sono quelle in cui ad ogni « sistema anticoniugato dell'evolvente corrispondono, nelle due « falde dell'evoluta, due sistemi coniugati ».

Determino le superficie S con un sistema di linee di curvature piane o circolari, e le superficie S inviluppi di sfere. Indi dimostro che « le sole rigate S sono le sviluppabili » e infine alcune proprietà delle superficie di rotazione applicabili sulle falde dell'evoluta di una S.

Corradino Mineo: *Paragone d'un intorno superficiale con un intorno sferico o pseudosferico.* « Rendiconto del Circolo Matematico di Palermo », Tomo XLVII, 1923.

In questo lavoro stabilisco, per mezzo di sviluppi in serie, le relazioni rigorose che passano tra gli elementi d'un triangolo geodetico, tracciato sopra una superficie qualunque, e le coordinate geodetiche polari dei suoi vertici, assunto come polo uno dei vertici del triangolo: nell'ipotesi, beninteso, che la superficie sia analitica nell'intorno del polo. Da queste relazioni, di capitale importanza per la Geodesia, segue che nell'intorno considerato valgono le formule della trigonometria sferica o pseudosferica, a meno d'infinitesimi non inferiori al terz'ordine (qualche formula vale a meno d'infinitesimi del quarto e qualche altra a meno d'infinitesimi del quint'ordine), preso come infinitesimo principale la grandezza dell'intorno. Già il SEVERI, in una importante Memoria pubblicata nel t. XLII dei *Rend. Circ. Matematico di Palermo*, il cui principale scopo è lo studio sintetico della curvatura delle superficie e varietà, era pervenuto a questo risultato, cercando di evitare sviluppi in serie e solo studiando la corrispondenza biunivoca che nasce tra la superficie e la sfera (o pseudosfera), della quale la curvatura eguagli quella della superficie nel polo, quando si associno le coppie di punti con le stesse coordinate geodetiche polari. Le relazioni da me stabilite permettono di studiare più a fondo l'anzidetta corrispondenza e portano a dimostrare il seguente teorema, indispensabile premessa della deduzione cui ho accennato: *Ad un arco geodetico dell'una superficie corrisponde sull'altra un arco, il quale:* 1) *differisce dalla sua corda geodetica per un infinitesimo del 4° ordine* (cosa, questa, che può esser anco dimostrata, come ingegnosamente fa il SEVERI, servendosi della proprietà di minimo della geodetica); 2) *forma, con essa corda, angoli infinitesimi del 3° ordine (rispetto alla grandezza dei due intorni).*

Equazioni differenziali. — FRANCESCO TRICOMI: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di second'ordine, di tipo misto.* « Memorie della R. Acc. Nazionale dei Lincei », S. 5ª, T. XIV, pagg. 131-247, 1923 (1).

Se i coefficienti di un'equazione (interamente) lineare alle derivate parziali di 2° ordine, a due variabili indipendenti, non sono costanti, l'equazione, in generale, sarà di tipo ellittico in una parte del piano x, y e di tipo iperbolico nell'altra, e si dirà *di tipo misto.* La Memoria suindicata è dedicata allo studio di siffatte equazioni, *considerate nella loro integrità*, vale a dire senza imporsi la condizione di non uscir mai dalla parte del piano in cui l'equazione è sempre ellittica o sempre iperbolica; studio che non risulta essere stato finora mai intrapreso.

Si dimostra anzitutto che un'equazione del tipo in esame, eccettuato casi singolari, può sempre ridursi, mediante sostitu-

(1) Un breve cenno preventivo di questo lavoro è già comparso in questo *Bollettino*. Anno I, n. 1, 1922, p. 14, in occasione della pubblicazione di una precedente Nota.

zioni *reali* di variabili, alla forma canonica

$$(1)\qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z+d(x,y)=0,$$

dove a, b, c, d sono funzioni date delle variabili x e y. Si ottiene così la semplificazione notevole che la curva che separa le due regioni nelle quali l'equazione è di tipi differenti (*curva parabolica*) si riduce all'asse x, al di sopra del quale la (1) è di tipo ellittico, mentre, al di sotto del medesimo, è iperbolica.

Successivamente le indagini vengono limitate all'equazione particolare

$$(E)\qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

ottenuta uguagliando a zero la parte di second'ordine della (1), equazione che ha qui una parte analoga a quella dell'equazione di LAPLACE fra le ellittiche o dell'equazione del calore fra le paraboliche.

La (E) può riguardarsi come una trasformata di una particolare equazione di EULER-POISSON; in tal modo si trova che fra i valori $\tau(x)$ che una soluzione *regolare* qualsiasi z della (E) prende su di un segmento AB dell'asse x, e quelli $\nu(x)$ assunti, su questo medesimo segmento, dalla sua derivata parziale rispetto ad y, $\partial z/\partial y$, intercede la relazione

$$(2)\qquad \tau(x)=\varphi_1(x)+\gamma\int_0^x(x-y)^{-\frac{1}{3}}\nu(y)dy:$$

dove γ è una costante numerica, e $\varphi_1(x)$ una funzione che dipende esclusivamente dai valori presi da z su d'un arco di una delle due *caratteristiche* dell'equazione spiccate dal punto A. Per maggior semplicità, nella formula è stato supposto che A sia l'origine delle coordinate.

Appoggiandosi sulla (2) si perviene al seguente ***teorema di unicità***:

Sia C il punto del semipiano iperbolico dal quale escono due caratteristiche passanti rispettivamente per A e per B, e sia σ una curva qualsiasi collegante A con B senza mai uscire dal semipiano ellittico: fra σ e i due archi di caratteristica CA e CB non può esistere più di una soluzione regolare dell'equazione (E) assumente valori arbitrariamente prefissati, con legge di continuità, sulla curva σ e sull'arco di caratteristica CA.

Dimostrato questo teorema nasceva il problema d'invertirlo, cioè di dimostrare l'*esistenza* della soluzione di cui esso assicura l'unicità. Si vede subito che il punto capitale di questa questione, ch'è difficilissima, è di provare che, dati i valori di z sopra σ e AC, si possono determinare le funzioni $\tau(x)$ e $\nu(x)$. A questo scopo si deve cercare di associare alla (2) un'altra relazione, della stessa specie, ma proveniente dalla considerazione dell'equazione nel semipiano ellittico. Risponde a queste esigenze l'uguaglianza

$$(3)\qquad \tau(x)=f_2(x)+\gamma\int_0^1\left[L(x,y)-(x-y)^{-\frac{1}{3}}+(x+y-2xy)^{-\frac{1}{3}}\right]\nu(y)dy,$$

dove L è una funzione dipendente solamente dalla forma della curva σ, mentre f_2 dipende anche dai valori deposti su detta curva. È questa la seconda formula fondamentale della teoria dell'equazione (E).

Fra la (2) e la (3) si può istantaneamente eliminare $\tau(x)$ e si ottiene in tal modo un'equazione integrale in $\nu(x)$, contenente nel medesimo tempo un integrale fra limiti variabili e uno fra limiti costanti (equazione integrale *mista*), alla cui risoluzione resta così ridotto il grosso del problema. Per procedere a tale risoluzione occorre far intervenire il concetto di *valor principale* di un integrale divergente, secondo CAUCHY; con l'ausilio del quale l'equazione in discorso può sostanzialmente ricondursi all'altra

$$(4)\qquad \nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^{*1}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{y-x}-\frac{1}{x+y-2xy}\right)\nu(y)dy=\chi(x),$$

dove $\chi(x)$ denota un'incognita ausiliare, e l'asterisco indica che dell'integrale si considera il valor principale.

Nella Memoria si fa uno studio approfondito dell'equazione integrale (4), arrivando alla conclusione finale ch'essa è sempre risolubile e ha una sola soluzione cui corrisponda una z regolare. In tal modo il teorema di esistenza resta perfettamente dimostrato sotto condizioni relative alla forma della curva σ e ai valori dati al contorno, su cui non è il caso di soffermarsi in questo brevissimo riassunto.

Gruppi discontinui. — G. SANSONE: *I sottogruppi del gruppo di Picard e due teoremi sui gruppi finiti analoghi al teorema del Dyck.* « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », T. XLVII, 1923.

In questa memoria mi sono proposto di studiare i sottogruppi $\Gamma_{\mu(n)}$ del gruppo Γ di PICARD di sostituzioni:

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

con α, β, γ, δ interi del campo di **Gauss** $(1, i)$ caratterizzati dalla relazione:

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0 \\ 0, 1\end{pmatrix} \pmod{n}.$$

Per l'indice $\mu(n)$ del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ in Γ, trovo la formula:

$$\mu(n) = \frac{1}{\lambda} N^3(n) \Pi \left(1 - \frac{1}{N^2(p_h)}\right)$$

col prodotto esteso a tutti i fattori primi distinti p_h di n, e col divisore $\lambda = 1$ per $n = 1 + i, 2$ e $\lambda = 2$ in ogni altro caso.

Per i campi fondamentali dei sottogruppi $\Gamma_{\mu(n)}$, trovo che il minor numero di vertici singolari del campo è dato dalla formula $\frac{\mu(n)}{2N(n)}$, e che il campo del gruppo ottenuto ampliando $\Gamma_{\mu(n)}$ con la rotazione $z' = -$ e la riflessione $z' = z_0$ non può limitarsi, eccettuati i casi $n = 1 + i, 2$ con un numero finito di piani o sfere di riflessione.

Passando a studiare i gruppi modulari finiti $G_{\mu(n)}$ che rappresentano gli indici di $\Gamma_{\mu(n)}$ in Γ, trovo che $G_{\mu(n)}$ si genera con le quattro operazioni:

$$S = \begin{pmatrix}0, 1 \\ -1, 1\end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix}0, 1 \\ -1, 0\end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix}0, i \\ i, 1\end{pmatrix}; \quad V = \begin{pmatrix}0, i \\ i, 0\end{pmatrix}.$$

Supposto $n = n_1 + in_2$ e n_1 e n_2 primi tra loro, le U e V si esprimono per le S e T, e le relazioni caratteristiche del gruppo sono:

$$S^3 = 1; \quad T^2 = 1, \quad (TS^2)^{n_1^2 + n_2^2} = 1$$

(Teorema del Dyck).

Supposto invece n_1 e n_2 non primi tra loro, e il numero $n_1 + in_2$ dispari, dimostro il seguente teorema: 1°) *Le operazioni S, T, U, V considerate come generatrici del gruppo $G_{\mu(n)}$ sono indipendenti;* 2°) *Ogni relazione fra le S, T, U, V è conseguenza delle seguenti:*

$$(\mathrm{I}) \left\{\begin{array}{l} S^3 = 1, \quad T^2 = 1, \quad U^3 = 1, \quad V^2 = 1, \\ (TU^2)^2 = 1, \quad (VS^2)^2 = 1, \quad (TV)^2 = 1, \quad SU^2 = US^2; \\ (TS^2)^{n_1}(VU^2)^{n_2} = 1, \quad (TS^2)^{-n_2}(VU^2)^{n_1} = 1. \end{array}\right.$$

Ho poi esaminato il caso dei moduli $m(1 + i)^\lambda$ (m dispari) e dimostrato lo stesso teorema per il modulo $m(1 + i)$ ($\lambda = 1$).

Con altre mie recenti ricerche, che pubblicherò tra breve, ho provato nel caso $\lambda > 1$ che il teorema enunciato sussiste ancora soltanto nei casi $\lambda = 2$, 3.

Trovo infine nella mia memoria le relazioni indipendenti che caratterizzano un gruppo finito di ordine $2\mu(n)$ generato con tre operazioni, e dimostro in tal modo un altro teorema sui gruppi finiti.

I metodi seguiti sono di natura generale e mi permettono, come sto facendo, di studiare i gruppi modulari con i coefficienti di un campo quadratico immaginario.

Geometria differenziale. — G. SANSONE: *Sulle superficie rigate con un sistema di traiettorie isogonali alle generatrici deformabili in linee di livello.* « Rendiconto R. Accad. dei Lincei », Serie 5ª, vol. XXXV, 2° semestre, (1923).

— — Idem: *Sulle superficie di rotazione con un sistema di traiettorie isogonali ai meridiani deformabili in linee di livello* (ibid.).

In queste due note, usando i resultati di una mia memoria, dimostro che le superficie che hanno le proprietà enunciate sono nel primo caso le rigate deformate dell'elicoide rigata d'area minima, e nell'altro caso le superficie di rotazione deformate del catenoide.

Algebra. — GIUSEPPE USAI: *Sopra una determinazione di funzioni di Sturm dovuta al Mollame.* « Giornale di Matematiche di Battaglini », primo semestre 1923.

Nel 1883, cioè circa 50 anni dopo la comparsa del celebre teorema di STURM, il prof. MOLLAME stabiliva un metodo geniale e pratico, fra i tanti esistenti in proposito, atto a determinare le funzioni sulle quali si basa il teorema.

Questo procedimento però non dà risultati esatti se applicato ad equazioni di grado superiore al terzo.

Così nel caso dell'equazione:

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$$

il processo dice che le soluzioni reali sono due positive e nessuna negativa, mentre con semplice verifica si vede che l'equazione è soddisfatta dai numeri $+1$, -1, $+2$, -3.

Il prof. USAI in questa Nota espone e dimostra con procedimenti più semplici e coi dovuti emendamenti tutto il metodo in questione, che in tal modo al vantaggio della rapidità unisce anche quello della sicurezza, e per ultimo lo illustra con opportuni esempi.

Attuaria. — GIUSEPPE USAI: *Relazioni fra funzioni biometriche.* Estratto dal « Giornale di Matematica Finanziaria », ottobre 1923.

In questo lavoro l'Autore traduce in forma analitica infinitesimale delle questioni e dei problemi che riguardano i concetti di vita probabile e media, la cui importanza è ben conosciuta nella teoria della mortalità. Viene poi ricavata, per incidenza, una interessante proprietà geometrica della funzione esponenziale il cui uso è sistematico in Matematica Finanziaria: tale proprietà è utile in un caso particolare per la determinazione della vita probabile.

Meccanica. — R. ARIANO: *Deformazioni finite dei sistemi continui.* In pubblicazione nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ».

In questa Memoria è trattata la Cinematica e la Statica delle deformazioni finite di sistemi continui, facendo uso sistematico della teoria delle omografie vettoriali e riferendosi sia a variabili proprie del sistema nello stato iniziale, sia a variabili relative al « sistema nello stato deformato ». Vi si mostra come la cinematica possa esser ridotta alla considerazione di un'omografia α, definita come la sostituzione fra una terna di vettori ortogonali i, j, k uscenti da un punto M del sistema iniziale e la terna dei vettori V_i, V_j, V_k in cui essi si trasformerebbero in virtù della deformazione, se questa agisse in tutti i loro punti come in M. Vi si analizza la deformazione, e si dimostra come essa possa ridursi all'insieme di tre dilatazioni elementari e di una rotazione, funzioni le une e l'altra (come del resto l'omografia α) del punto considerato. Vi si mostra come alcune particolari deformazioni possono ridursi alla considerazione di particolari omografie.

Si mostra in seguito che le equazioni di equilibrio sono semplicemente esprimibili a mezzo di un'omografia β e che il lavoro di deformazione non è che l'invariante primo dell'omografia $\beta\alpha$.

Le relazioni fra sforzi e deformazioni sono ridotte alla considerazione di una terza omografia γ.

Delle tre omografie α, β e γ sono infine considerate le più salienti proprietà.
