Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Severini

Sopra alcuni sviluppi in serie di funzioni fondamentali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.5, p. 173–176.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_5_173_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

Sopra alcuni sviluppi in serie di funzioni fondamentali.

Nota di CARLO SEVERINI

In due recenti Note (¹) mi sono occupato degli sviluppi in serie di funzioni fondamentali, che in un intervallo (a, b) soddisfano ad equazioni della forma:

$$U_k''(x) + [\lambda_k p(x) - q(x)] U_k(x) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ed a condizioni ai limiti, espresse da relazioni del tipo:

$$\begin{aligned} a_1 U_k(a) + a_2 U_k'(a) + a_3 U_k(b) + a_4 U_k'(b) &= 0 \\ b_1 U_k(a) + b_2 U_k'(a) + b_3 U_k(b) + b_4 U_k'(b) &= 0, \end{aligned} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ove $p(x)$ e $q(x)$ sono due funzioni note, continue, di cui la prima è anche maggiore di zero in ogni punto di (a, b); λ_k è un parametro indeterminato, ed a_s, b_s $(s = 1, 2, 3, 4)$ sono costanti assegnate, per le quali si ha:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_3 b_4 - a_4 b_3.$$

Indicando con:

$$W_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

una successione completa di siffatte funzioni fondamentali, ortogonali e normali rispetto alla funzione caratteristica $p(x)$, tali cioè da avere:

$$\int_a^b p(x) W_h(x) W_k(x) dz = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ 1 & \text{» } h = k, \end{cases}$$

e con:

$$\Lambda_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

la corrispondente successione dei numeri caratteristici, reali, non nulli, disposti per moduli non decrescenti (²), ho dimostrato che

(¹) *Sopra alcuni sviluppi in serie di funzioni fondamentali* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. XXXI, serie 5ª, 1° sem. (1923)].

(²) Cfr. W. STEKLOFF: *Sur certaines questions d'Analyse, qui se rattachent à plusieurs problèmes de la Physique Mathématique* [Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, VII série, classe physico-mathématique, Vol. XXXI, n. 7 (1913)].

***

la serie

$$(1)\qquad \sum_{0}^{\infty}{}_k B_k W_k(x) \qquad B_k = \int_a^b p(x) f(x) W_k(x) dz,$$

ove $f(x)$ indica una funzione sommabile insieme col suo quadrato nell'intervallo (a, b), converge ivi uniformemente se :

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} \left[\left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k B_k^2 \right) \cdot \left(\sum_{n+1}^{n+p}{}_k \Lambda_k B_k^2 \right) \right] = 0.$$

in particolare se, qualunque sia n, risulta :

$$(3)\qquad \left| \sum_{0}^{n}{}_k \Lambda_k B_k^2 \right| \leq C, \qquad (C \textit{ costante}).$$

Mi propongo ora di assegnare delle condizioni per la convergenza assoluta ed uniforme della (1). Queste condizioni generalizzano, al pari della (2) e della (3), quella che scaturisce [3], dai noti teoremi di SCHMIDT [4] e PICARD [5], consistente nell'ammettere, che si abbia, per ogni n :

$$\sum_{0}^{n}{}_k \Lambda_k^2 B_k^2 \leq C \qquad (C \text{ costante}).$$

1. Posto :

$$\overline{R}_{n,\,p}(x) = \sum_{n+1}^{n+p}{}_k \left| B_k W_k(x) \right| ,$$

indicando con μ una costante positiva qualsivoglia, si trova [6]:

$$R_{n,\,p}(x) = \int_a^b p(x) \left[\sum_{n+1}^{n+p}{}_k \left| \Lambda_k^{\frac{\mu}{2}} \right| B_k \cdot W_k(y) \right] \left| \sum_{n+1}^{n+p}{}_k \Lambda_k^{-\frac{\mu}{2}} \left| W_k(x) \right| \cdot W_k(y) \right| dy.$$

(3) Cfr. C. SEVERINI: *Sulla convergenza delle serie di funzioni ortogonali*, § 2 [Atti dell'Accademia Gioenia di Catania, serie V, Vol. VIII, (1915)].

(4) Cfr. E. SCHMIDT: *Zur Theorie der linearen und nichtlineare Integralgleichungen* [Mathematische Annalen, Bd. LXIII (1906), Heft. 4, S. 461].

(5) Cfr. E. PICARD: *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de premiere espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXIX (1916) p. 79, § 4]. Cfr. anche STEKLOFF, l. c. (2), Chap. II, n. 11.

(6) Di ogni potenza non intera s'intende considerare naturalmente il valore aritmetico.

e per la *disuguaglianza di* SCHWARZ:

(4) $$\bar{R}_{n,p}(x) \leqq \sqrt{\sum_{n+1}^{n+p}{}_k |\Lambda_k|^{\mu} B_k^2} \sqrt{\sum_{n+1}^{n+p}{}_k |\Lambda_k|^{-\mu} \cdot [W_k(x)]^2}\,.$$

D'altra parte si ha in ogni punto di (a, b):

(5) $$|W_k(x)| \leqq D\sqrt{|\Lambda_k|} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ove con D s'indica una costante positiva, assegnabile, ed in particolare:

(6) $$|W_k(x)| \leqq D\sqrt[4]{|\Lambda_k|} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

se:

(7) $$a_2 b_4 - a_4 b_2 \gtrless 0 \text{ [7]};$$

di più, per k abbastanza grande, si ha ancora:

(8) $$|\Lambda_k| > D'k^2,$$

D' essendo del pari una costante positiva, assegnabile [8].

Dalla (4) e dalla (5) segue:

(9) $$\bar{R}_{n,p}(x) \leqq D\sqrt{\sum_{n+1}^{n+p}{}_k |\Lambda_k|^{\mu} \cdot B_k^2 \cdot} \sqrt{\sum_{n+1}^{n+p}{}_k |\Lambda_k|^{1-\mu}},$$

ed in particolare dalla (4) e dalla (6):

(10) $$\bar{R}_{n,p}(x) \leqq D\sqrt{\sum_{n+1}^{n+p}{}_k |\Lambda_k|^{\mu} \cdot B_k^2 \cdot} \sqrt{\sum_{n+1}^{n+p}{}_k |\Lambda_k|^{\frac{1}{2}-\mu}}.$$

Poichè, a causa della (8), la serie $\sum_0^{\infty}{}_k |\Lambda_k|^{1-\mu}$ converge per $\mu > \frac{3}{2}$ e la serie $\sum_0^{\infty}{}_k |\Lambda_k|^{\frac{1}{2}-\mu}$ per $\mu > 1$, la (9) e la (10) conducono senz'altro al seguente teorema:

La serie (1) *converge assolutamente ed uniformemente nell'intervallo* (a, b), *se per qualche valore di* $\mu > \frac{3}{2}$ *risulta, qualunque sia* n:

(11) $$\sum_0^{n}{}_k |\Lambda_k|^{\mu} \cdot B_k^2 \leqq C \qquad (C \text{ costante}).$$

Nel caso che sia soddisfatta la (7), *il medesimo si verifica, se la* (11) *ha luogo per qualche valore di* $\mu > 1$.

[7] Cfr. STEKLOFF, l. c. (2), Chap. I, n. 22, 23.
[8] Cfr. STEKLOFF, l. c. (2), *Remarques complementaires*, n. 1, 2.

2. La condizione espressa dalla (11) è in particolare soddisfatta, se è limitata la successione dei rapporti dei termini della serie $\sum_0^\infty {}_k |\Lambda_k|^\mu \cdot B_k^2$ ai termini corrispondenti della serie $\sum_0^\infty {}_k |\Lambda_k|^{-\mu'}$, ove μ' indica una quantità maggiore di $\frac{1}{2}$. Si ha pertanto quest'altro teorema (9).

La serie (1) *converge assolutamente ed uniformemente nell' intervallo* (a, b), *se si ha, per qualche valore di* $\mu > 2$:

$$|\Lambda_k|^\mu \cdot |B_k| \leq C \qquad (C \text{ costante}). \tag{12}$$

Nel caso che sia soddisfatta la (7), *il medesimo si verifica, se la* (12) *ha luogo per qualche valore di* $\mu > \frac{3}{2}$.

3. Quando si tratti di stabilire soltanto la convergenza, o la convergenza assoluta, della (1), quasi dappertutto nell' intervallo (a, b), fatta cioè al più eccezione per i punti di un insieme di misura nulla, valgono i seguenti teoremi, che si deducono, in base alla disuguaglianza (8), dagl' importanti risultati, ottenuti a questo riguardo da HOBSON (10), e dai risultati analoghi della mia Nota, dianzi citata (11); teoremi, nei quali entrano ancora in considerazione, insieme coi coefficienti di FOURIER, i numeri caratteristici Λ_k.

I. *La serie* (1) *converge (converge assolutamente) quasi dappertutto nell' intervallo* (a, b), *se per qualche valore di* $\mu > 0$ (*per qualche valore di* $\mu > \frac{1}{2}$) *si ha, qualunque sia* n:

$$\sum_0^n {}_k |\Lambda_k|^\mu \cdot B_k^2 \geq C \qquad (C \text{ costante}).$$

II. *La serie* (1) *converge (converge assolutamente) quasi dappertutto nell' intervallo* (a, b) *se, per qualche valore di* $\mu > \frac{1}{4}$, *si ha:*

$$\lim_{k=\infty} |\Lambda_k|^\mu \cdot B_k = 0$$

$\left(\textit{se per qualche valore di } \mu > \frac{1}{2} \textit{ è verificata la } (12)\right)$.

Genova, maggio 1923.

(9) Cfr. SEVERINI, l. c. (3), n. 4.

(10) Cfr. HOBSON: *On the convergence of series of orthogonal functions* [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 12 (1912)].

(11) l. c. 3, n.i 3 e 4.