Bollettino Unione Matematica Italiana

V. Gori

Su una reciprocità fra variazioni di flusso d'induzione magnetica e correnti indotte in circuiti elettrici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.5, p. 163–166.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_5_163_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1923.

Su una reciprocità fra variazioni di flusso d'induzione magnetica e correnti indotte in circuiti elettrici.

Nota di V. Gori

La variazione nel tempo di un qualsivoglia stato elettromagnetico può esser dovuta, come è noto, a due ragioni: o i sistemi capaci di dare manifestazioni elettriche e magnetiche si spostano nello spazio ed allora la distribuzione dei campo varia in conseguenza del moto, o i sistemi stessi rimangono immobili ed allora la variazione del campo magnetico può essere prodotta da variazioni della intensità delle correnti elettriche, modificazioni nella permeabilità del mezzo, etc.

Mi riferisco qui al secondo caso ed indico con S' e S'' due stati elettromagnetici di cui siano U' ed U'' i potenziali vettori. Sup pongo altresì che ciascuno di essi eserciti azione induttiva sopra un numero qualunque dei circuiti elettrici.

Per un generico circuito, il campo elettrico E' indotto da una variazione di flusso dovuto ad S', soddisfa alla relazione

$$E' = -A \frac{\partial U'}{\partial t} \tag{1}$$

A essendo la « costante elettromagnetica ».

Analogamente il campo elettrico E'', indotto a causa di una variazione di flusso dovuto ad S'', è tale che

$$E'' = -A \frac{\partial U''}{\partial t}. \tag{1'}$$

Si osservi ora che se il tempo durante il quale il sistema S' (ed S'') varia in modo sensibile è grande relativamente al tempo necessario a che una perturbazione elettromagnetica si propaghi da un punto ad un altro dello spazio, in ciascun istante potremo considerare le grandezze pertinenti al sistema induttore ed indotto, come indipendenti dal tempo. La condizione perchè tale approssimazione sia legittima è che, in regime periodico, l'espressione:

$$\frac{\omega\varepsilon}{4\pi\lambda}$$

dove:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, essendo T il periodo della grandezza variabile,

$\varepsilon =$ costante dielettrica del conduttore,

$\lambda =$ conduttività specifica dello stesso,

sia trascurabile in confronto all'unità.

Essa è soddisfatta per i fenomeni « *quasi stazionarî* » ed in particolare delle grandezze alternate di ordinaria frequenza.

In tale ipotesi, in un *generico istante* e per un generico punto di un circuito indotto, la funzione scalare « potenziale elettrico » dipenderà solamente dalle coordinate del punto. Pertanto, indicandola con φ' ed ammettendone implicitamente la continuità e derivabilità, avremo:

$$E' = \operatorname{grad} \varphi'.$$

La densità c' della corrente indotta, è proporzionale al grad φ', secondo il coefficiente λ di conduttività che è costante con (x, y, z) se il conduttore è isotropo omogeneo. Ossia

$$c' = \lambda E'.$$

D'altra parte la densità c', pur risultando una funzione comunque periodica del tempo, è caratterizzata in ogni istante dal fatto che

$$\operatorname{div} c' = 0.$$

In modo perfettamente identico, quando varî il flusso dovuto ad S'', avremo per lo stesso circuito indotto ed in ogni istante

$$E'' = \operatorname{grad} \varphi''; \quad c'' = \lambda E''; \quad \operatorname{div} c'' = 0.$$

* * *

Tutto ciò premesso, consideriamo l'integrale

$$\int \lambda E' \times E'' d\zeta$$

ζ essendo il volume occupato dal conduttore. Per l'arbitrarietà con cui possiamo pensare scomposto il volume ζ medesimo in elementi, è lecito scrivere

$$\int \lambda E' \times E'' d\zeta = \int_\sigma \lambda E' \times n d\sigma \int_l E'' \times t dl :$$

indicando con σ una sezione trasversale del conduttore; n un vettore unitario normale all'elemento $d\sigma$, assunto positivo nel verso di E'; l l'asse del conduttore e t un vettore unitario tangente ad l ed il cui verso positivo corrisponda a quello di E''.

Per il teorema di STOKES, è

$$\int_l E'' \times t dl = \int_\sigma \operatorname{rot} E'' \times n_1 d\sigma_1 ,$$

dove con σ_1 intendiamo un qualsivoglia diaframma che abbia per contorno l, e con n_1, un vettore unitario normale a $d\sigma_1$, ed orientato positivamente in modo opportuno.

D'altronde se con B'' indichiamo l'« induzione magnetica » relativa ad S'', deve aversi

$$B'' = \operatorname{rot} U''$$

quindi, tenuto conto della (1'), si ha

$$\int_l E'' \times t dl = - A \int_{\sigma_1} \frac{\partial (B'' \times n_1)}{\partial t} d\sigma_1 .$$

Si osservi inoltre che

$$\int_\sigma \lambda \boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = I',$$

essendo I' il valore dell'intensità di corrente che nell'istante considerato attraversa una sezione generica del conduttore.

In definitiva

$$\int \lambda \boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{E}'' d\zeta = - A I' \int_{\sigma_1} \frac{\partial (\boldsymbol{B}'' \times \boldsymbol{n}_1)}{\partial t} d\sigma_1$$

ma, come una facile considerazione dimostra, è anche

$$\int \lambda \boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{E}'' d\zeta = - A I'' \int_{\sigma_1} \frac{\partial (\boldsymbol{B}' \times \boldsymbol{n}_1)}{\partial t} d\sigma_1$$

onde si trae

$$I' \int_{\sigma_1} \frac{\partial (\boldsymbol{B}'' \times \boldsymbol{n}_1)}{\partial t} d\sigma_1 = I'' \int_{\sigma_1} \frac{\partial (\boldsymbol{B}' \times \boldsymbol{n}_1)}{\partial t} d\sigma_1,$$

espressione analitica della reciprocità di cui al titolo e che nell'ipotesi più generale di un numero qualunque di circuiti assume la forma:

$$\sum_{r=1}^{n} I_r' \int \frac{\partial (\boldsymbol{B}_r'' \times \boldsymbol{n}_1)}{\partial t} d\sigma_1 = \sum_{r=1}^{n} I_r'' \int \frac{\partial (\boldsymbol{B}_r' \times \boldsymbol{n}_1)}{\partial t} d\sigma_1.$$

Possiamo perciò enunciare:

« Dato un complesso di circuiti elettrici capaci di subire « azione induttiva per effetto di due diversi sistemi di variazioni « di flusso d'induzione magnetica, in ogni istante la somma dei « prodotti delle intensità di correnti indotte da un sistema per « le variazioni di flusso attraverso i circuiti e dovuto all'altro « è eguale alla somma dei prodotti delle intensità di correnti « indotte da questo secondo sistema per le variazioni di flusso « dovute al primo ».

Bologna, giugno 1923.