SUNTI DI LAVORI ESTERI

Geometria differenziale. — E. O. LOVETT (*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, T. 174, pag. 1151, 1922) generalizza un problema di S. LIE, cercando sopra una superficie riferita alle sue linee di lunghezza nulla, $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$, quelle curve che ammettono le trasformazioni di contatto che hanno per funzione caratteristica $2\varphi(x)\psi(y)\sqrt{y'} + \xi(x)y' - n(y)$ con $\varphi'' = g(x)\varphi$, $\xi\xi''' = 2(g\xi^2)'$, $\psi'' = h(y)\psi$; dà poi alcune soluzioni particolari del problema.

— — C. GUICHARD (*Ibid.*, T. 174, pag. 1215; T. 175, pag. 1374; T. 176, pag. 217 e pag. 425).

Nella prima nota dà un modo di dedurre dalle proprietà metriche di un certo reticolato di uno spazio a 6 dimensioni, proprietà proiettive delle asintotiche di una superficie; e viceversa. Ne fa poi applicazione a due problemi particolari.

Nella seconda nota dà varie proprietà dei reticolati che sono rispettivamente coniugati a due congruenze polari reciproche rispetto a un complesso lineare.

Nella terza nota studia le proprietà infinitesimali delle trasformazioni per polari reciproche rispetto a una sfera, ottenendo risultati che permettono di trattare varî problemi, come quello di cercare le congruenze normali che si trasformano in congruenze normali.

Nella quarta nota determina le coppie di sistemi tripli ortogonali che si corrispondono in modo che la seconda tangente dell'uno sia polare reciproca della terza tangente dell'altro rispetto a un complesso lineare, e riconduce la risoluzione del problema all'integrazione di una equazione di LAPLACE e a quadrature.

— — B. GAMBIER (*Ibid.*, T. 174, pag. 1613; T. 176, pag. 27).

Nella prima nota riprende i risultati di HAZZIDAKIS e di BONNET sulle superficie applicabili con raggi di curvatura uguali e li completa con alcune osservazioni.

Nella seconda nota si occupa delle curve di BERTRAND e delle trasformazioni involutorie permutabili, generalizzando quelle considerate da BIANCHI, DARBOUX e LIE. *g. s.*

Geometria differenziale. — E. MERLIN (*Ibid.*, T. 175, pag. 437 e pag. 668).

Nella prima nota considera un reticolato descritto da un punto $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ e studia la trasformazione affine che nasce facendo corrispondere a ciascun punto $P(X, Y, Z)$ dello spazio quel punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ che è definito dalle equazioni

$$X = x + \xi\frac{\partial x}{\partial u} + \eta\frac{\partial x}{\partial v} + \zeta x, \ldots, \quad Z = z + \xi\frac{\partial z}{\partial u} + \eta\frac{\partial z}{\partial v} + \zeta z,$$

e che appartiene ad uno spazio mobile col punto (u, v) sul reticolato.

Nella seconda nota, applicando i concetti della prima, trova alcuni risultati sui reticolati; in particolare, generalizza un noto teorema di KOENIGS sui reticolati piani a invarianti uguali.

— — A. MILLER (*Ibid.*, T. 175, pag. 939; T. 176, pag. 483).

Nella prima nota associa a ciascun punto M d'una curva C un piano P passante per esso e variabile in modo continuo col punto, e si propone di formare una superficie rigata S con la condizione che le sue generatrici passino per i punti M di C e giacciano nei piani P, e due di esse infinitamente vicine facciano il minimo angolo possibile. Se i piani P sono tangenti a C, le generatrici di S risultano parallele nel senso di LEVI-CIVITA.

Nella seconda nota considera quest'ultimo tipo di rigate S e per una curva C giacente su di una superficie, deducendone varie conseguenze.

— — L. BIANCHI (*Ibid.*, T. 176, pag. 721) considera un rombo gobbo che occupi nello spazio ∞^2 configurazioni la cui forma varî in modo continuo insieme con la lunghezza dei lati, e si domanda di trovare tutti i casi in cui la superficie descritta da ciascun vertice risulti tangente ai due lati del rombo uscenti dal vertice stesso. Ammesso che ciò sia possibile, trova che: 1°) *la retta congiungente i punti medî delle diagonali del rombo descrive una congruenza normale le cui superficie ortogonali sono W*; 2°) *i quattro lati del rombo descrivono quattro congruenze il cui parametro medio è costante*; 3°) *queste quattro congruenze sono anche congruenze di rotolamento* (di un certo tipo).

Sussistono poi teoremi inversi, che assicurano la effettiva esistenza delle configurazioni ammesse e per *ogni* superficie W; anzi per ogni superficie W il problema ammette ∞^2 soluzioni che si ottengono in termini *finiti*. L'importanza di questi risultati è evidente: *essi forniscono una generazione cinematica di ogni superficie W e (quindi) di ogni superficie applicabile su di una superficie di rotazione.* *g. s.*

Geometria differenziale. — P. MENTRÉ (*Ibid.*, T. 175, pag. 941) chiama *fuochi singolari* di una retta di un complesso, non lineare e non speciale, i punti della retta che appartengono alle « coppie inflessionali », definite e studiate da KOENIGS, e studia quei complessi nei quali ogni retta ha almeno un fuoco *doppio* (due coincidenti). Dimostra che, secondo che su ogni retta vi sono 1 o 2 fuochi doppî, il complesso è inviluppato da un complesso lineare la cui posizione dipende da 2 o 1 parametro; che se poi vi è un fuoco *quadruplo*, il complesso è costituito da una famiglia particolare di congruenze lineari speciali.

— — D' OCAGNE (*Ibid.*, T. 176, pag. 1032) fa delle osservazioni su risultati noti relativi alle sviluppabili generate dalle normali di una quadrica lungo una linea di curvatura. *g. s.*

Geometria analitica. — A. ANGELESCO (*Ibid.*, T. 175, pag. 666) cerca le curve piane $x = f(u)$, $y = g(u)$ tali che tutti i triangoli aventi per vertici tre punti di una curva corrispondenti a valori di u in progressione aritmetica abbiano la stessa area e la stessa orientazione; e trova che sono le coniche.

— — E. O. LOVETT (*Ibid.*, T. 176, pag. 666) dà varie generalizzazioni del precedente problema di ANGELESCO.

— — G. BRATU (*Ibid.*, T. 176, pag. 70) studia le curve definite da certe successioni ricorrenti da lui considerate precedentemente.

— — N. ABRAMESCO (*Ibid.*, T. 176, pag. 651) considera le curve piane determinate da un numero finito di loro punti ed espone un procedimento per determinare un punto generico d'una di tali curve mediante i punti dati e un parametro reale λ. Così, posto in generale $z = x + iy$, l'equazione *autogeneratrice* della retta per i punti z_1, z_2 è $z = (z_1 + \lambda z_2) : (1 + \lambda)$, quella del cerchio per i punti z_0, z_1, z_2 è $z = [z_1(z_2 - z_0) + \lambda z_2(z_1 - z_0)] : [z_2 - z_0 + \lambda(z_1 - z_0)]$; quella d'ogni altra curva a connessione semplice può dedursi dalla precedente del cerchio con l'uso d'una rappresentazione conforme. *g. s.*

Geometria algebrica. — G. GAMBIER (*Ibid.*, T. 175, pag. 1384) considera H punti d'un piano come punti base di un sistema lineare di curve C_m di ordine m, e, secondo che il numero delle C_m linearmente indipendenti è uguale o maggiore del più grande dei numeri 0 e $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - H$, chiama *normale* o *anormale per il numero m* il gruppo degli H punti. Egli cerca tutti i gruppi anormali per un dato grado m.

— — C. E. TRAYNARD (*Ibid.*, T. 176, pag. 561) si occupa delle superficie del 4° ordine con 15 punti doppî, con osservazioni che lo conducono a risultati sulle funzioni abeliane singolari. *g. s.*

Geometria proiettiva. — N. SAKELLARION (*Ibid.*, T. 175, pagg. 399 e 1389) dà varie proprietà dei tetraedri o pentaedri o esaedri polari rispetto a una forma lineare quaternaria, in aggiunta a quelli da lui già dati precedentemente nel *Giornale di Matematiche*, 1921.

— — A. BÉJOT (*Ibid.*, T. 175, pag. 401) si occupa del modo di porre in posizione prospettiva due figure composte di elementi della stessa specie in corrispondenza biunivoca. Mostra che la cosa può essere possibile in più modi (come per due quadrilateri) o essere impossibile (come per un poligono con più di 5 lati o per due cubiche piane non complanari); che la molteplicità dei possibili centri di prospettiva può esser varia; che talvolta si possono porre in posizione prospettiva più di due figure; ecc. *g. s.*

Geometria descrittiva. — D'OCAGNE (*Ibid.*, T. 175, pag. 737) osserva che i varî metodi usati per la rappresentazione dello spazio sul piano appaiono come procedenti da concetti differenti nella forma sotto cui vengono ordinariamente presentati; egli per contro li fa dipendere tutti da un unico principio, che è poi suscettibile di estensione alla rappresentazione piana di uno spazio a 4 dimensioni. *g. s.*

Geometria vettoriale. — G. BOULIGAND (*Ibid.*, T. 175, pag. 1387) introduce come ente *duale* a quello di vettore il *doublet*, sistema di due piani paralleli di ordine fissato e definito a meno di una traslazione. *g. s.*

Topologia. — P. URYSOHN (*Ibid.*, T. 175, pagg. 440 e 481). Nella prima nota osserva che il problema della definizione puramente geometrica delle linee può considerarsi come risoluto dalle nozioni di linee cantoriane, di continui irriducibili di ZORETTI, di curve di JORDAN senza punti multipli. Però delle tre nozioni solo l' ultima è applicabile a uno spazio a più di due dimensioni; perciò egli pone e risolve i problemi seguenti: dare una definizione di linee cantoriane valida per uno spazio qualunque; definire le superficie e, più generalmente, le multiplicità cantoriane a n dimensioni.

Nella seconda nota fa uno studio approfondito delle linee cantoriane. *g. s.*

STEFÀN BANACH: *Sur le problème de la mesure* « Fundamenta Mathematicae », t. IV, 1923, pp. 7-33.

L'A. considera le funzioni limitate di una variabile x, periodiche di periodo 1. Scrive $f(x) \backsim o$, se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile trovare dei numeri $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ per cui, qualunque sia n,

$$\frac{1}{n}\left|\sum_1^n{}_i f(x+\alpha_i)\right| < \varepsilon;$$

e chiama *equipollenti* due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ per cui $f(x) - g(x) \backsim 0$.

Dopo aver dimostrato che due funzioni equipollenti ad una terza sono equipollenti fra loro, l'A. chiama *iperfunzione* l'insieme di tutte le funzioni equipollenti ad una medesima, e dimostra che se F è una iperfunzione e c è una costante reale, le funzioni di F moltiplicate per c formano una iperfunzione che indica con cF, e dimostra inoltre che se F_1, F_2 sono due iperfunzioni, tutte le funzioni somma di una funzione di F_1 e di una di F_2 formano una iperfunzione che indica con $F_1 + F_2$.

L'A. chiama poi *corpo* di iperfunzioni un insieme Ω di iperfunzioni tali che, se $F_1, F_2, \ldots F_m$ sono iperfunzioni di Ω, anche $c_1F_1 + c_2F_2 + \ldots + c_mF_m$, con le c_i costanti reali a piacere, lo sia; e dimostra che tutte le iperfunzioni che contengono almeno una funzione integrabile L formano un corpo $\Omega(L)$.

Immaginiamo di bene ordinare tutte le iperfunzioni che non appartengono ad $\Omega(L)$ e indichiamo con F_α l'iperfunzione che corrisponde al numero ordinale α. Poi formiamo i corpi Ω_α nel modo seguente: Poniamo $\Omega_1 = \Omega(L)$, poi, costruito un Ω_α, consideriamo la 1ª iperfunzione F_β che non appartiene ad Ω_α, e poniamo $\Omega_{\alpha+1}$ uguale al corpo che contiene tutte le iperfunzioni $c_1\Phi + c_2F_\beta$ dove Φ è una qualunque iperfunzione di Ω_α e c_1, c_2 sono delle costanti reali a piacere. Se poi α è un numero ordinale che non ha il precedente, e per ogni numero $\alpha' < \alpha$ è definito $\Omega_{\alpha'}$, l'insieme di tutte le iperfunzioni che appartengono ad almeno un $\Omega_{\alpha'}$ $(\alpha' < \alpha)$ è ancora un corpo che prendiamo per Ω_α.

L'A. dimostra che tutte le funzioni integrabili L che appartengono a una stessa iperfunzione hanno lo stesso integrale L nell'intervallo $(0, 1)$ e per ogni iperfunzione F di $\Omega(L) = \Omega_1$ pone $A_1(F) = \int_0^1 f(x)dx$, dove $f(x)$ è una funzione di F integrabile L. e definisce poi per ogni numero ordinale α e per qualsiasi iperfunzione F di Ω_α un numero $A_\alpha(F)$ nel modo seguente: Se una iperfunzione F di Ω_α appartiene anche ad un $\Omega_{\alpha'}(\alpha' < \alpha)$ l'A. pone $A_\alpha(F) = A_{\alpha'}(F)$.

Se α ha precedente e si conoscono già le $A_{\alpha-1}(F)$, basta definire le $A_\alpha(F)$ per le F che non appartengono ad $\Omega_{\alpha-1}$. Ora esiste un F_β che non appartiene ad $\Omega_{\alpha-1}$ e per cui ogni F di Ω_α è della forma $c_1\Phi + c_2F_\beta$, dove Φ è una iperfunzione di $\Omega_{\alpha-1}$ e c_1, c_2 sono costanti reali. L'A. dice che una iperfunzione F è > 0 se per una sua funzione $f(x)$ [e quindi per ogni altra] esiste un numero reale $C > 0$ ed altri numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ per cui $\frac{1}{n}\sum_1^n f(x + \alpha_i) > C$ e che di due iperfunzioni F_1, F_2 è $F_1 > F_2$ se $F_1 - F_2 > 0$.

Sia λ il limite inferiore di tutte le $A_{\alpha-1}(\Phi)$ relative a tutte le iperfunzioni $\Phi > F_\beta$ appartenenti ad $\Omega_{\alpha-1}$. L'A., per ogni $F = c_1\Phi + c_2F_\beta$ pone $A_\alpha(F) = c_1A_{\alpha-1}(\Phi) + c_2\lambda$. Si ponga, per ogni iperfunzione F, $A(F) = A_\alpha(F)$, se F appartiene ad Ω_α. L'A. dimostra che

a) Se F_1, F_2 sono due iperfunzioni e c_1, c_2 due costanti reali è $A(c_1F_1 + c_2F_2) = c_1A(F_1) + c_2A(F_2)$.

b) Per ogni $F > 0$ è $A(F) > 0$.

c) Se F contiene una funzione $f(x)$ integrabile L è $A(F) = \int_0^1 f(x)dx$.

Sia G un gruppo di punti di $(0, 1)$. La funzione $f(x)$ uguale ad 1 in G e a 0 nei punti rimanenti di $(0, 1)$ appartiene ad una iperfunzione F.

Ponendo $m(G) = A(F)$, resta risoluto per i gruppi di punti di $(0, 1)$ il problema della misura in senso largo.

Consegue che questo problema si può risolvere per l'insieme dei gruppi limitati di punti di una retta.

L'A. risolve poi lo stesso problema per i gruppi limitati di punti del piano, e osserva che tanto per la retta come per il piano il problema si può risolvere anche senza che tutti i gruppi di LEBESGUE abbiano per misura la misura di LEBESGUE.

Il problema della misura in senso largo non è risolubile per l'insieme dei gruppi di punti dello spazio a 3 o più dimensioni (1).

g. r.

Topologia delle curve piane. — JULIUS V. SZ. NAGY. *Über Kurven von Maximal-Klassenindex*: *Über Kurven von Maximalindex.* Math. Ann., 89 (1923), pp. 32-75.

Tra i caratteri topologici delle curve piane reali figurano l'*ordine* (dal punto di vista reale) e l'*indice*, massimo o risp. minimo numero dei punti (reali) comuni alla curva e ad una retta del suo piano, ed i caratteri duali: *classe* ed *indice tangenziale* (Klassenindex). L'A. assegna metodi semplici per costruire curve piane, algebriche o no, di classe n e di massimo indice tangenziale, $n-2$; e ne trova varie proprietà inerenti al numero e alla natura dei rami che le compongono, alle relazioni di posizione tra questi, ecc. Interessante il concetto di *riducibilità* nel campo reale, diverso da quello ordinario di spezzamento d'una curva piana algebrica: una curva C di *classe* n è detta *riducibile*, e C_1, C_2,... C_k di classi n_1, n_2,... n_k se ne dicono le componenti, se $n = n_1 + ... + n_k$, e se i rami di C_1, C_2,... C_k danno tutti i rami di C, ciascuno una volta sola. Così è irriducibile, pur non essendo algebricamente tale, l'insieme di una ellisse e di un'ipocicloide tricuspide ad essa interna ($n_1 = 2$, $n_2 = 3$; $n = 3$); invece una C^4 di Cassini composta di due ovali è riducibile ($n_1 = n_2 = 2$, $n = 4$). Una curva di classe n e di massimo indice tangenziale è irriducibile se detto indice è la somma degli indici analoghi di tutti i suoi rami (che son tutti di massimo indice tangenziale), e viceversa; oppure se la regione piana dai punti della quale si posson tirare $n-2$ tangenti alla curva è connessa, e viceversa. E se $p+1$ è l'ordine di connessione di quella regione, p vien detto *genere* della curva; se la curva ha $n-1$ rami (il massimo) esso vale $n-2$, e coincide con l'espressione $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - w - t$ ove w, t son risp. le tangenti di flesso e le bitangenti (reali), ecc.

e. g. t.

(1) F. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, pp. 469-471.