Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Dore

Sul teorema di Clairaut

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.4, p. 134–139.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_4_134_0>

Sul teorema di Clairaut.

Nota di PAOLO DORE

Il classico teorema di CLAIRAUT che lega il decremento relativo della gravità dall' equatore al polo, lo schiacciamento, e il rapporto fra la forza centrifuga e la gravità all' equatore, fu dato dal suo autore nell' opera *La Figure de la terre* nell' ipotesi di una distribuzione della massa terrestre in strati omogenei limitati da superficie di rotazione elissoidiche coassiali, e fu poi dimostrato dallo STOCKES [1], indipendentemente da qualsiasi ipotesi sulla distribuzione della massa terrestre, ammettendo solo che la superficie della terra sia una superficie di livello prossimamente rappresentabile con un elissoide di rotazione di piccolo schiacciamento, in modo da assicurarne la validità indipendentemente da vincoli che ne rendevano di fatto praticamente pressochè illusorio il valore. È noto poi che dell'argomento ebbero successivamente ad occuparsi il BRUNS e l'HELMERT [2] il quale ultimo dimostrò una formula più generale valida per termini d'ordine superiore a quello in cui è valido l'ordinario teorema di CLAIRAUT.

Nel corso di alcune mie ricerche sulla possibilità di dedurre le relazioni fra scostamenti geoidici e anomalie della gravità dalla seconda formula di GREEN applicata ad una opportuna funzione del potenziale dell'attrazione e della forza centrifuga, mi è avvenuto di incontrare una dimostrazione del teorema di CLAIRAUT che ritengo non del tutto priva di interesse, particolarmente in vista di una sistematica deduzione dalla suddetta formula di tutte le fondamentali relazioni fra misure di gravità e misure di elementi geometrici sulla superficie terrestre.

Se si indicano con r, θ, ψ, raggio vettore, collatitudine geocentrica e longitudine di un punto, con $V(r, \theta, \psi)$ la funzione potenziale dell'attrazione terrestre, e si pone

$$F(r, \theta, \psi) = \frac{1}{2}\,\omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

l'equazione di una superficie S di livello della gravità g sarà

$$W(r, \theta, \psi) = V(r, \theta, \psi) + F(r, \theta) = W_0 .$$

Si pensi F come l'insieme dei valori al contorno di una funzione $F_1(r, \theta, \psi)$ che nello spazio esterno alla S soddisfa all'equazione

$$\Delta_2 F_1 = 0$$

ed è regolare e nulla all'infinito: si dimostra agevolmente che

(1) *On Attractions and on Clairaut's Theorem.* Cambridge and Dublin Math. Jour., Vol. IV, p. 194 [1849] oppure *Math. and phys. Papers*, Vol. II.

(2) BRUNS, *Die figure der Erde*, pag. 17 (Berlin 1878) e HELMERT *Hoher. Geod. II*, pag. 75 e segg. Il teorema di CLAIRAUT è stato dimostrato anche dal PIZZETTI come conseguenza delle sue formule della gravità elissoidica.

la seconda formola di GREEN applicata alla funzione $V + F_1$ sulla S dà [1]

(1) $$4\pi W_0 = \int_S \frac{1}{R} \left\{ g + \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\partial F_1}{\partial r} \right\} dS.$$

Se si ammette che la S sia poco differente da una sfera per modo che la sua equazione possa porsi sotto la forma

$$r = a(1 - \alpha t)$$

essendo a il raggio della sfera prossima alla S, α una costante piccolissima e t una funzione di θ e ψ sviluppabile per funzioni sferiche in maniera che sia

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} T_n$$

si dimostra che a meno di termini dell'ordine di α^2 e $\omega^2\alpha$ i coefficienti ϑ_i dello sviluppo di F_1 per potenze negative del raggio vettore

$$F_1(r, \theta, \psi) = \frac{1}{r} \vartheta_0 + \frac{1}{r^2} \vartheta_1 + \frac{1}{r_3} \vartheta_2 + \dots$$

soddisfano alle relazioni [2]

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_0 = \frac{1}{3} \omega^2 a^3 \\ \vartheta_1 = - \alpha a \vartheta_0 T_1 \\ \vartheta_2 = - \alpha a^2 \vartheta_0 T_2 + \frac{1}{2} \omega^2 a^5 \left\{ \frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right\}. \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Similmente nello stesso ordine di approssimazione l'inversa della distanza di un punto generico della S da un punto di coordinate θ_1, ψ_1, e l'elemento di superficie dS risultano [3] rispettivamente

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a\sqrt{2(1 - \cos\gamma)}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \alpha t + \frac{1}{2} \alpha t_1 \right\}$$

$$dS = a^2 \{ 1 - 2\alpha t \} df$$

(1) Cfr. BUCHWALDT, *Les principes de la géodésie statique* in « Den Danske Graadmalig N. R. » n. 17 oppure la nota dello scrivente, *Sulle relazioni intercedenti fra le deviazioni del geoide* ecc. in « Memorie della Società Astronomica italiana », Vol. II, n. 3.

(2) DORE, l. c.

(3) DORE, l. c.

essendo t_1 il valore di t per $\theta = \theta_1$, $\psi = \psi_1$ e df l'elemento di superficie della sfera di raggio unitario.

Supponiamo g sviluppato per funzioni sferiche e indicando con G_0 la gravità media sulla superficie corrispondente a $\theta = \text{arc cos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ldots\right)$ poniamo

$$g = G_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \right\}$$

la (1), posto

$$\frac{\omega^2 a}{G_0} = m$$

diviene

$$\int_f G_0 \left\{ 1 + \sum_1^{\infty} \Gamma_n + m + \frac{5}{2} m \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \theta \right) \right\} =$$

$$= \left[1 - \frac{3}{2} \alpha t + \frac{1}{2} \alpha t_1 \right] \frac{df}{\sqrt{2(1 - \cos \gamma)}} = \frac{4\pi W_0}{a} = 4\pi C$$

da cui sviluppando i prodotti, trascurando i termini dell' ordine di $\omega^2 \alpha$ e ω^4 e tenendo conto della nota formula relativa alle funzioni sferiche di due variabili

$$\int_f Y_m \frac{df}{\sqrt{2(1 - \cos \gamma)}} = \frac{4\pi}{2m + 1} Y'_m$$

(accentuando le funzioni sferiche relative ad una determinata coppia di valori $\theta = \theta_1$, $\psi = \psi_1$)

$$1 + \Sigma \frac{1}{2n + 1} \Gamma'_n + m + \frac{5}{2} m \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \theta_1 \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \alpha \Sigma T'_n - \frac{3}{2} \Sigma \frac{1}{2n + 1} T'_n = \frac{C}{G_0}.$$

Uguagliando a zero le funzioni sferiche di uguale ordine nei due membri si ha la successione di eguaglianze

$$(3) \quad \begin{cases} 1 + m - \alpha T_0 = \dfrac{C}{G_0} \\ \Gamma_1 = 0 \\ \Gamma_2 = -\dfrac{5}{2} m \left(\dfrac{1}{3} - \cos^2 \theta_1 \right) - \alpha T_2 \\ \Gamma_i = -(i - 1) \alpha T_i \qquad (i = 3, 4 \ldots). \end{cases}$$

Se si assimila lo sferoide ad un elissoide, indicando con s lo schiacciamento e con a il semiasse maggiore, a meno di termini in s^2 può porsi

$$r = a(1 - s\cos^2\theta) \tag{4}$$

e poichè il valore medio a_1 del raggio è

$$a_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} a(1 - s\cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta d\psi = a\left(1 - \frac{s}{3}\right)$$

così volendo far comparire a_1 in luogo di a la (4) diviene

$$r = a_1\left\{1 + s\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right)\right\}.$$

Ponendo quindi $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = \frac{1}{3} - \cos^2\theta$, $z = -s$ le (3) daranno

$$\Gamma_2 = -\frac{5}{2}m\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right) + s\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right) =$$
$$= -\left(\frac{5}{6}m - \frac{s}{3}\right) + \left(\frac{5}{2}m - s\right)\cos^2\theta$$

e pertanto

$$g = G_0\left\{1 - \frac{5}{6}m + \frac{s}{3} + \left(\frac{5}{2}m - s\right)\cos^2\theta\right\}$$

che dà l'analogo del teorema di CLAIRAUT in cui compare la gravità media anzichè la gravità all'equatore. Pongasi

$$G_1 = G_0\left\{1 - \frac{5}{6}m + \frac{s}{3}\right\}:$$

nel nostro ordine di approssimazione potremo scrivere

$$g = G_1\left\{1 + \left(\frac{5}{2}m - s\right)\cos^2\theta\right\}$$

e G_1 è la gravità all'equatore. Invero nella nota formula che dà il valore approssimato della gravità in un punto dell'elissoide di collatitudine θ

$$g = \frac{fM}{r^2}\left\{1 + \left(s - \frac{1}{2}m\right)\frac{a^2}{r^2} - \frac{\omega^2r^3}{fM} + \left[\frac{\omega^2r^3}{fM} - 3\left(s - \frac{1}{2}m\right)\frac{a^2}{r^2}\right]\cos^2\theta\right\}$$

si pone successivamente $\cos\theta = 0$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ corrispondentemente ai valori di r, a ed a_1 rispettivamente, si ha

$$G = \frac{fM}{a^2}\left\{1 + s - \frac{3}{2}m\right\}$$

$$G_0 = \frac{fM}{a_1^2}\left(1 - \frac{2}{3}m\right)$$

essendo nel nostro ordine di approssimazione

$$m = \frac{\omega^2 a^3}{fM} = \frac{\omega^2 a_1^3}{fM} = \frac{\omega^2 a}{G}.$$

Segue

$$\frac{G}{G_0} = 1 - \frac{5}{6}m + \frac{s}{3}$$

e

$$G = G_1.$$

Rimane quindi dimostrata la relazione

$$g = G\left\{1 + \left(\frac{5}{2}m - s\right)\cos^2\theta\right\}$$

in cui G è la gravità all'equatore, m il rapporto fra la forza centrifuga e la gravità all'equatore, s lo schiacciamento: tale relazione dà, per $\cos\theta = 1$, il rapporto fra la differenza della gravità al polo e all'equatore e la gravità all'equatore. c. d. d.

Bologna, gennaio 1923.