Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Alessandro Terracini

Correlazioni geodetiche fra due superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.4, p. 132–134.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_4_132_0>

Correlazioni geodetiche fra due superficie.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI

Un teorema notissimo, dovuto al DINI, ci fa conoscere fin dove è possibile estendere la nozione di omografia fra piani, quando, anzichè due piani, si considerino due superficie qualunque, e alle rette di quelli si sostituiscano le geodetiche di queste. Non credo che sia stata compiuta un'indagine di tal fatta per ciò che riguarda le correlazioni: qui vogliamo appunto ricercare *quali sono le coppie di superficie tra cui si può porre una* **correlazione geodetica,** *cioè una corrispondenza biunivoca fra i punti di ciascuna superficie e le geodetiche dell' altra, tale da conservare l' appartenenza di punto e geodetica.* Giungeremo così a una nuova proprietà caratteristica delle superficie a curvatura costante, in quanto troveremo che *correlazioni geodetiche sono possibili sempre e solamente, fra superficie a curvatura costante.* La prima parte dell' asserto si giustifica senz'altro col tramite di una rappresentazione geodetica piana di due superficie a curvatura costante fra cui si voglia stabilire una correlazione geodetica. Ci occuperemo dunque esclusivamente della seconda.

Siano S e T due superficie fra cui è stabilita una correlazione geodetica, riferite rispettivamente alle coordinate curvilinee τ_1, τ_2; τ_3, τ_4. Se $\lambda(\tau_1, \tau_2, a, b) = 0$, con a, b costanti arbitrarie essenziali, è l'equazione delle geodetiche di S, si possono porre le relazioni invertibili $\tau_3 = \tau_3(a, b)$; $\tau_4 = \tau_4(a, b)$, tali che, se per esse $\lambda = 0$ si trasforma in

$$\mu(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = 0, \tag{1}$$

le singole coppie di valori di τ_3, τ_4, che con τ_1, τ_2 fissati soddisfanno la (1), individuano sulla T — in quanto corrispondono sulla S alle geodetiche per il punto determinato da quei valori di τ_1, τ_2 — i punti di una geodetica. La (1) è dunque simultaneamente l'equazione delle geodetiche di S e di T, secondochè si riguardano come costanti τ_3, τ_4, oppure τ_1, τ_2.

La (1) contiene certo esplicitamente τ_4, e fornisce

$$\tau_4 = \varphi(\tau_1, \tau_2, \tau_3). \tag{2}$$

Per semplicità di calcolo, supporremo in tutto il seguito che ciascuna delle due superficie in questione sia stata riferita alle sue linee minime. Ciò esclude implicitamente che l'una o l'altra delle due superficie sia una sviluppabile isotropa, ma non si perde in tal modo nessuna soluzione del problema. Le prime forme quadratiche fondamentali di S, T assumeranno perciò rispettivamente la forma $2L(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2$, $2F(\tau_3, \tau_4)d\tau_3 d\tau_4$. Designando per brevità coll'apposizione dei corrispondenti indici la derivata di una funzione di τ_1, τ_2, τ_3 rispetto a una o più fra queste variabili, e riservando il consueto simbolo alle derivate parziali delle funzioni di τ_3, τ_4, considerate — riguardo alla derivazione — come variabili indipendenti, si avrà identicamente, scrivendo che la (2) è l'equazione delle geodetiche di S e di T,

$$\varphi_{33}F + \varphi_3^2\frac{\partial F}{\partial \tau_4} - \varphi_3\frac{\partial F}{\partial \tau_3} = 0, \tag{3}$$

$$-\frac{\varphi_{11}}{\varphi_1^2} + \frac{2\varphi_{12}}{\varphi_1\varphi_2} - \frac{\varphi_{22}}{\varphi_2^2} + \frac{L_1}{L\varphi_1} + \frac{L_2}{L\varphi_2} = 0, \tag{4}$$

purchè il valore di τ_4 che compare come argomento in F, $\frac{\partial F}{\partial \tau_3}, \frac{\partial F}{\partial \tau_4}$ si consideri legato dalla (2) a τ_1, τ_2, τ_3. Moltiplicata la (4) per φ_2, se ne trae, con derivazione rispetto a τ_3,

$$\frac{L_1}{L} = \frac{\varphi_1 B_2 - \varphi_2 B_1}{\varphi_2 B} + \frac{2\varphi_{11}}{\varphi_1} - \frac{\varphi_{12}}{\varphi_2} - \frac{\varphi_{22}\varphi_1}{\varphi_2^2}, \tag{5}$$

dove $B = \varphi_2\varphi_{13} - \varphi_1\varphi_{23}$ non è certo identicamente nullo. D'altra parte, la (3), insieme colle relazioni che se ne ottengono derivandola totalmente rispetto a τ_1, τ_2, fornisce

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial \tau_4} = \frac{\varphi_{33}}{\varphi_3^2} - \frac{B_3}{\varphi_3 B}, \tag{6}$$

colla stessa avvertenza formulata dopo la (4). Scrivendo che il secondo membro è, come il primo, funzione di τ_3 e φ, si ricava

$$2\frac{B_3}{\varphi_3} - 2\frac{\varphi_{33}B}{\varphi_3^2} + \frac{\varphi_1 B_{23} - \varphi_2 B_{13}}{B} - \frac{B_3}{B^2}(\varphi_1 B_2 - \varphi_2 B_1) = 0,$$

relazione che sottratta a membro a membro, previa divisione per φ_2, da quella che si ottiene scrivendo che il secondo membro della (5) non dipende da τ_3, porge

$$\varphi_1\left(\log\frac{\varphi_2}{\varphi_3}\right)_{23} - \varphi_2\left(\log\frac{\varphi_1}{\varphi_3}\right)_{13} = 0. \tag{7}$$

Ora, definito $\gamma(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ mediante la

$$LF(\tau_3, \varphi)B^2 = \gamma^3,$$

si verifica subito, in base alle (5), (6), (7), che

$$\left(\frac{\varphi_1}{\gamma}\right)_1 = \left(\frac{\varphi_2}{\gamma}\right)_2 = 0.$$

Esistono perciò due funzioni $\varepsilon(\tau_2, \tau_3)$, $\eta(\tau_1, \tau_3)$ tali che si può porre

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varepsilon(\tau_2, \tau_3)}{\eta(\tau_1, \tau_3)},$$

e allora la (4) si trasforma in

$$(4') \qquad (L\varepsilon)_2 + (L\eta)_1 = 0.$$

Perciò, fissato un valore di τ_3, sia $\bar{\tau}_3$, se si assumono sulla S delle nuove coordinate curvilinee t_1, t_2 definite rispettivamente da

$$dt_1 = \frac{d\tau_1}{\eta(\tau_1, \bar{\tau}_3)}, \quad dt_2 = \frac{d\tau_2}{\varepsilon(\tau_2, \bar{\tau}_3)},$$

il quadrato dell'elemento lineare diventa $2\bar{L}(t_1, t_2)dt_1dt_2$, dove la L, in base alla (4'), è funzione di $t_1 - t_2$. E poichè un tale elemento lineare appartiene a una superficie di rotazione su cui le $t_1 - t_2 =$ costante rappresentano i paralleli, se ne inferisce che lungo ciascuna delle linee su cui

$$\frac{d\tau_1}{\eta(\tau_1, \bar{\tau}_3)} = \frac{d\tau_2}{\varepsilon(\tau_2, \bar{\tau}_3)}$$

la curvatura totale della S è costante. Ma la linea di questo sistema, passante per un punto fissato genericamente su S, non può restar fissa al variare di $\bar{\tau}_3$, giacchè, come si è già osservato, è $B \neq 0$. Si conclude perciò che la curvatura di S è costante su ciascuna linea di un sistema ∞^2, e pertanto sulla superficie stessa. E siccome lo stesso vale per la T, il teorema è completamente dimostrato.

Torino, gennaio 1923.

Sul teorema di Clairaut.

Nota di PAOLO DORE

Il classico teorema di CLAIRAUT che lega il decremento relativo della gravità dall'equatore al polo, lo schiacciamento, e il rapporto fra la forza centrifuga e la gravità all'equatore, fu dato dal suo autore nell'opera *La Figure de la terre* nell'ipotesi di una distribuzione della massa terrestre in strati omogenei limitati da superficie di rotazione elissoidiche coassiali, e fu poi dimo-