
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMBERTO CRUDELI

**Condizione necessaria e sufficiente
affinchè due superficie (reali e
regolari) a curvatura non costante
siano suscettibili di una stessa
metrica**

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 2 (1923), n.4, p. 128–131.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_4_128_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_4_128_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due superficie (reali e regolari) a curvatura non costante siano suscettibili di una stessa metrica.

Nota di UMBERTO CRUDELI

Com'è noto, la condizione necessaria e sufficiente, affinchè due superficie a curvatura gaussiana *costante* siano suscettibili di una stessa metrica, esprime *che siano fra loro eguali coteste due curvature costanti*. In questa breve Nota vogliamo mostrare come, nei riguardi di superficie a curvatura gaussiana *non costante*, la cercata condizione necessaria e sufficiente è *che esista una corrispondenza puntuale biunivoca fra le due superficie, la quale produca eguaglianza delle loro curvature gaussiane (in punti mutuamente omologhi della corrispondenza medesima) ed inoltre costituisca una rappresentazione conforme che muti un doppio sistema di geodetiche dell'una superficie in un doppio sistema di geodetiche dell'altra*.

Intanto, che la nostra condizione sia necessaria risulta subito osservando come, se due superficie sono suscettibili di una stessa metrica, esse sono (per definizione) suscettibili di essere poste in mutua corrispondenza isometrica; allora, oltre ad aversi eguaglianza delle curvature gaussiane in punti fra loro omologhi della corrispondenza in discorso, questa costituisce una rappresentazione conforme che muta tutte le geodetiche dell'una superficie

nelle geodetiche dell'altra (quindi, a fortiori, *un* doppio sistema di geodetiche in un doppio sistema di geodetiche).

Si tratta ora di mostrare la sufficienza della nostra condizione. Siano, in proposito, ds e $d\sigma$ gli elementi lineari delle due superficie; si scriva

$$\begin{cases} ds^2 = \varepsilon du^2 + 2fdudv + gdv^2 \\ d\sigma^2 = \varepsilon' du^2 + 2f'dudv + g'dv^2 \end{cases}$$

Ciò premesso, intendendo che i sistemi coordinati relativi alle due superficie medesime siano i supposti sistemi di geodetiche mutuamente corrispondenti e ricordando che la nostra corrispondenza costituisce (per ipotesi) una rappresentazione conforme, si ottiene facilmente

$$k\sqrt{eg - f^2} = z\sqrt{\varepsilon'g' - f'^2},$$

denotando con k e z le curvature gaussiane delle due superficie in punti fra loro omologhi di essa corrispondenza. Ma (per ipotesi) $k = z$; per cui, non omettendo di osservare come la veduta curvatura, per essere stata supposta non costante (sottinteso non costante in ogni porzione delle considerate superficie) risulta di certo non identicamente nulla in ognuna di coteste porzioni, potremo scrivere

$$\sqrt{eg - f^2} = \sqrt{\varepsilon'g' - f'^2}.$$

Ne segue che la nostra corrispondenza costituisce anche una rappresentazione equivalente; dunque, per essere conforme ed equivalente, la rappresentazione in discorso costituisce una isometria.

Il veduto ragionamento di conclusione serve anche a mostrare come, *supposta esistente fra due superficie non sviluppabili* (cioè a curvatura non identicamente nulla in ogni loro porzione) *una corrispondenza, la quale costituisca una rappresentazione conforme con eguaglianza delle curvature gaussiane di esse superficie in punti fra loro omologhi della corrispondenza ed inoltre sia tale da mutare un doppio sistema di geodetiche in un doppio sistema di geodetiche, la corrispondenza medesima risulta isometrica* ⁽¹⁾.

(1) La proposizione esclude le superficie sviluppabili. La ragione di ciò emerge, con esuberante motivo, dalla circostanza per cui fra due superficie sviluppabili può sempre stabilirsi una corrispondenza *non isometrica*, la quale costituisca una rappresentazione conforme ed inoltre geodetica dell'una superficie sull'altra, sebbene le curvature siano fra

Come vedremo, delle tre condizioni, di cui una consiste nella eguaglianza delle curvature gaussiane in punti omologhi della corrispondenza, un'altra nel porre che questa costituisca una rappresentazione conforme, ed un'altra nel prescrivere che la corrispondenza stessa muti un doppio sistema di geodetiche dell'una superficie in un doppio sistema di geodetiche dell'altra, due (comunque scelte) non sono sufficienti ad assicurare la isometria della corrispondenza in discorso.

Intanto, la esistenza di rappresentazioni conformi, ma non isometriche, con eguaglianza delle curvature gaussiane in punti fra loro omologhi, può vedersi mediante considerazione delle seguenti due forme differenziali quadratiche:

$$(1) \quad ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2), \quad d\sigma^2 = \mu(du^2 + dv^2),$$

dove i coefficienti λ e μ siano funzioni soddisfacenti alla equazione

$$\frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 \log \mu}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \mu}{\partial v^2} \right),$$

la quale viene ottenuta eguagliando le due curvature gaussiane. Una rappresentazione, alla quale siano inerenti (col relativo significato dei simboli) forme (1), può, sebbene conforme con eguaglianza delle curvature gaussiane in punti omologhi, non costituire una isometria. Invero, nel caso della isometria, i quadrati degli elementi lineari devono rientrare nei tipi di quelli spettanti a due superficie quando queste sono atte ad essere rappresentate geodeticamente l'una sull'altra; per cui basta ricordare cotesti tipi. Il richiamo delle forme spettanti ai quadrati degli elementi lineari, quando si tratta di due superficie rappresentabili geodeticamente l'una sull'altra, ci permetterà inoltre di condurre a termine la dimostrazione del nostro asserto relativo alla insufficienza di due (comunque scelte) fra le tre condizioni dianzi vedute per la isometria di una corrispondenza.

loro eguali (poichè ovunque nulle). Basta in proposito considerare le due forme differenziali quadratiche

$$\begin{cases} ds^2 = du^2 + dv^2 \\ d\sigma^2 = \alpha(du^2 + dv^2), \end{cases}$$

con α costante positiva diversa dall'unità.

Lo studio delle rappresentazioni (sottinteso reali) di una superficie sopra un'altra, nel caso in cui si tratti di superficie le quali siano suscettibili di essere rappresentate geodeticamente l'una sull'altra, conduce, com'è noto, alla riduzione dei quadrati degli elementi lineari delle due superficie stesse ad una delle seguenti due coppie, cioè: od alla

$$(2) \quad \begin{cases} ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 \\ d\tau^2 = c(Edu^2 + Gdv^2) \end{cases} \quad (c = \text{costante})$$

oppure alla

$$(3) \quad \begin{cases} ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2) \\ d\sigma^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right) \end{cases}$$

in cui la U è funzione soltanto della u e la V soltanto della v . Mediante le (2), prendendovi naturalmente c diversa dall'unità, si vede subito la esistenza di rappresentazioni geodetiche ed, in pari tempo, conformi, senza uguaglianza delle curvature gaussiane in punti fra loro corrispondenti. D'altra parte, le (3), pensando ivi le funzioni U e V tali da soddisfare la equazione che si ottiene eguagliando le due curvature gaussiane, servono a mostrarci la esistenza di rappresentazioni geodetiche, con eguaglianza delle predette curvature in punti fra loro omologhi, senza che le rappresentazioni stesse risultino conformi. Infine, ritornando alle (1), si vede facilmente, col sussidio delle (2) e (3), la esistenza di rappresentazioni conformi, con eguaglianza delle curvature gaussiane in punti fra loro omologhi, senza che le relative corrispondenze costituiscano rappresentazioni geodetiche.

Giova poi notare, mediante considerazione delle seguenti due forme differenziali quadratiche

$$\begin{cases} ds^2 = du^2 + G(u)dv^2 \\ d\tau^2 = \lambda(u)(du^2 + G(u)dv^2), \end{cases}$$

[in cui $\lambda(u)$ venga pensata funzione soddisfacente la equazione che si ottiene eguagliando le relative curvature gaussiane] la esistenza di rappresentazioni *non isometriche* ma conformi, le quali siano atte a conservare la curvatura gaussiana e siano tali inoltre che ad una famiglia di geodetiche corrisponda una famiglia di geodetiche.