Bollettino Unione Matematica Italiana

Umberto Cisotti

Considerazioni sulla nota formula idrodinamica di Daniele Bernoulli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.4, p. 125–128.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_4_125_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

Considerazioni sulla nota formula idrodinamica di Daniele Bernoulli.

Nota di UMBERTO CISOTTI

È ben nota la formula che esprime il cosidetto *teorema di Bernoulli*, e che mette in rilievo una notevole proprietà delle linee di flusso nei moti *stazionari* di una massa fluida, soggetta all'azione di forze conservative, quando la densità si può ritenere funzione della pressione. Precisamente, indicando U il potenziale delle forze di massa, ρ la densità, p il valore della pressione specifica, v la velocità in un generico posto, e introducendo la quantità

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho},$$

il teorema di Bernoulli esprime che il trinomio

$$\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi, \tag{1}$$

ha valore costante lungo una medesima linea di flusso [1], pur potendo variare, il valore della costante, da una linea all'altra.

Se si tratta di più di moti *irrotazionali*, per i quali

$$\text{rot}\, v = 0,$$

[1] DANIEL BERNOULLI, *Hydrodynamica*, Argentorati (1738), pag. 19.

il predetto trinomio ha il medesimo valore costante (non semplicemente lungo ciascuna linea di flusso ma addirittura) in tutti i punti dello spazio occupato dal fluido [1].

A questo punto sorge spontanea la domanda: tra i moti stazionari di un fluido perfetto, sono i soli moti irrotazionali atti a godere la proprietà accennata, secondo cui il trinomio (1) è una costante assoluta, oppure ne esistono degli altri?

Il BELTRAMI aveva già constatato [2] che *se il trinomio ha un valore costante in tutto lo spazio occupato dal fluido, e il moto è vorticoso, le linee vorticose coincidono colle linee di flusso.*

Mi propongo di mettere in rilievo che vale anche la proposizione inversa, precisamente che *se in un moto vorticoso le linee di flusso coincidono colle linee vorticose, il trinomio* (1) *è costante in tutto lo spazio occupato dal fluido.* E inoltre che *questo moto* — che dirò di BELTRAMI — *e il moto non vorticoso, sono i soli moti per i quali il trinomio* (1) *mantiene valore costante in tutto il campo del fluido.*

Se poi ci si pone il quesito: nei moti vorticosi, vi sono altre congruenze di linee, oltre quella delle linee di flusso, per cui vale il teorema di BERNOULLI, cioè tali che lungo ciascuna linea il trinomio (1) mantiene valore costante? Si constata che anche per le linee vorticose vale il teorema di BERNOULLI, e ciò era noto [3]; ma si può asserire che *le linee di flusso e le linee vorticose sono le sole congruenze di linee per le quali sussiste il teorema di Bernoulli.*

La giustificazione di quanto precede costituisce altresì un esempio della semplicità e quasi evidenza delle conclusioni, che i mezzi vettoriali impiegati offrono di fronte ai procedimenti laboriosi del BELTRAMI.

1. L'equazione vettoriale che congloba le tre equazioni idrodinamiche di EULERO [4]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\operatorname{rot} v) \wedge v + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi\right) = 0,$$

[1] Cfr. ad es. MARCOLONGO, *Meccanica razionale II: Dinamica, Meccanica dei sistemi deformabili.* [Manuali Hoepli (seconda edizione), pag. 383].

[2] *Considerazioni idrodinamiche.* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, vol. XXII (1889), pagg. 121-130]. Cfr. anche APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle.* [Paris, Gauthier-Villars, T. III (1921), pag. 411], che ha messo in rilievo l'importanza del tipo di moti studiati dal Beltrami.

[3] Cfr. ad esempio, APPELL, loco ultimo citato.

[4] Cfr. ad es. BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Analyse vectorielle générale; II, Applications à la Mécanique et à la Physique.* [Pavia, Mattei (1913), p. 56].

nell'ipotesi di moti *stazionari*, essendo $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, si riduce alla seguente

$$(2) \qquad (\operatorname{rot} v) \wedge v + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi\right) = 0,$$

e le quantità che in essa compaiono non dipendono esplicitamente dal tempo.

Risulta dalla (2) che, condizione necessaria e sufficiente affinchè il trinomio

$$\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi,$$

sia costante, in tutto il campo occupato dal fluido, è che si abbia

$$(\operatorname{rot} v) \wedge v = 0.$$

Questa è soddisfatta: o per $\operatorname{rot} v = 0$, cioè per i moti non vorticosi; oppure, essendo $\operatorname{rot} v$ non nullo, quando — e *solamente* quando — v e $\operatorname{rot} v$ sono paralleli, cioè si tratta di moti di Beltrami.

Con ciò rimane dimostrato che *il trinomio* (1) *è una costante assoluta: per i moti non vorticosi e per i moti vorticosi di Beltrami e per questi due soli tipi di movimento.*

2. Si supponga il moto vorticoso e designi dP un generico spostamento di un punto P: si moltiplichi scalarmente la (2) per dP; essendo

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi\right) \times dP = d\left(\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi\right),$$

si ottiene

$$(3) \qquad [(\operatorname{rot} v) \wedge v] \times dP + d\left(\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi\right) = 0.$$

Si rilevi che notoriamente si hanno le seguenti identità vettoriali

$$(4) \quad [(\operatorname{rot} v) \wedge v] \times dP = (\operatorname{rot} v) \times [v \wedge dP] = - v \times [(\operatorname{rot} v) \wedge dP].$$

Se ci si pone ora il problema di individuare le congruenze di linee, lungo ciascuna delle quali il trinomio (1) si mantiene costante, ossia si ha

$$d\left(\frac{1}{2} v^2 - U + \Pi\right) = 0,$$

dalla (3) scende che ciò ha luogo quando, e solamente quando

$$[(\mathrm{rot}\, v) \wedge v] \times dP = 0,$$

ovvero, per le (4), solamente quando si verifica l'una o l'altra delle seguenti relazioni

$$(\mathrm{rot}\, v) \times [v \wedge dP] = 0, \quad v \times [(\mathrm{rot}\, v) \wedge dP] = 0,$$

le quali, dovendo venire soddisfatte per ogni dP di ciascuna linea, si riducono alle seguenti

$$v \wedge dP = 0, \quad (\mathrm{rot}\, v) \wedge dP = 0.$$

La prima di queste è caratteristica delle linee di flusso e la seconda delle linee vorticose. Da qui la conclusione annunciata: che *per i moti stazionari vorticosi, le linee di flusso e le linee vorticose sono le sole linee per le quali vale il teorema di Bernoulli.*

Milano, gennaio 1923.