Bollettino Unione Matematica Italiana

Gino Loria

Applicazioni geometriche di una formula di F. Siacci

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.3, p. 93–97.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_3_93_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

Applicazioni geometriche di una formola di F. Siacci.

Nota di GINO LORIA

In un articolo, che non reca la sua firma [1], Francesco Siacci fece conoscere una formula che, se non erriamo, non venne sino ad oggi ravvisata come germe di estese applicazioni geometriche: sia lecito ad un antico alunno di quell'illustre scienziato di segnalarne alcune, sia pure semplicemente come postumo omaggio alla di lui venerata memoria.

1. Si consideri il quoziente

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) \ldots. & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) \ldots. & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) \ldots. & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \psi_1(x_0) \ldots. & \psi_n(x_0) \\ \psi_0(x_1) & \psi_1(x_1) \ldots. & \psi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_0(x_n) & \psi_1(x_n) \ldots. & \psi_n(x_n) \end{vmatrix},$$

ove le φ, ψ sono $2(n+1)$ tutte funzioni analitiche di una variabile, definite ciascuna in un determinato intervallo; si supponga che tali intervalli abbiano una parte comune, nella quale cadano i valori considerati $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Ora se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si accostano a x_0, quel quoziente si presenta sotto forma indeterminata ed il suo vero valore è in generale espresso come segue:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots. & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0'(x_0) & \varphi_1'(x_0) & \ldots. & \varphi_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(n)}(x_0) & \varphi_1^{(n)}(x_0) & \ldots. & \varphi_n^{(n)}(x_0) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \psi_1(x_0) & \ldots. & \psi_n(x_0) \\ \psi_0'(x_0) & \psi_1'(x_0) & \ldots. & \psi_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_0^{(n)}(x_0) & \psi_1^{(n)}(x_0) & \ldots. & \psi_n^{(n)}(x_0) \end{vmatrix} \;[2].$$

[1] E. NOVARESE, *Intorno alla moltiplicazione delle funzioni ellittiche* (Atti della R. Acc. di Torino, T. XVIII, 1882, p. 723-733).

[2] Le funzioni numeratore e denominatore acquistarono di recente grande importanza nell'analisi e sono dette Wronskiani.

Tale è il risultato ottenuto dal Siacci [1]. Per dimostrarne l'esattezza osserviamo che, facendo tendere x_1 a x_0 ed applicando la regola del marchese de l'Hôpital, si ottiene (servendosi d'un'abbreviazione di significato evidente) come limite del quoziente (1)

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(x_0) \\ \varphi_i'(x_0) \\ \varphi_i(x_2) \\ \cdots \\ \varphi_i(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_j(x_0) \\ \psi_j'(x_0) \\ \psi_j(x_2) \\ \cdots \\ \psi_j(x_n) \end{vmatrix}.$$

Ma se qui facciamo tendere x_2 a x_0, per trovare il vero valore di questo quoziente è necessario eseguire una duplice differenziazione sugli elementi delle terze orizzontali e si ottiene come valore limite

$$\begin{vmatrix} \varphi_i(x_0) \\ \varphi_i'(x_0) \\ \varphi_i''(x_0) \\ \cdots \\ \varphi_i(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \psi_j(x_0) \\ \psi_j'(x_0) \\ \psi_j''(x_0) \\ \cdots \\ \psi_j(x_0) \end{vmatrix}.$$

Proseguendo similmente si giunge al risultato enunciato.

2. Da ciò un corollario. Si consideri l'equazione

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_n \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

ove le X_0, $X_1, \ldots, X_n$ sono quantità qualunque indipendenti dalle $x_1, \ldots, x_n$ e si supponga che queste variabili tendano ad uno stesso valore x_0; allora quell'equazione tenderà alla seguente forma limite

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & \cdots & X_n \\ \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0'(x_0) & \varphi_1'(x_0) & \cdots & \varphi_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0^{(n-1)}(x_0) & \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

[1] Una formola analoga, più generale, si ottiene supponendo che soltanto alcune delle x_0, $x_1, \ldots, x_n$ tendono ad un limite comune, mentre alcune altre tendono ad un secondo limite, ecc..

3. Un'applicazione immediata di questa formola fa passare dall'equazione

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x(t_0) & y(t_0) & z(t_0) & 1 \\ x(t_1) & y(t_1) & z(t_1) & 1 \\ x(t_2) & y(t_2) & z(t_2) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(ove, qui come in seguito X, Y, Z designano coordinate correnti) del piano che passa per i tre punti della curva

$$(5) \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

corrispondenti ai valori t_0, t_1, t_2 del parametro t, all'equazione

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x(t_0) & y(t_0) & z(t) & 1 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) & 0 \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(x_0) & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ ossia } \begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

che compete al piano osculatore nel punto t_0.

4. Come altra applicazione della stessa equazione (4) proponiamoci di determinare la sfera osculatrice in un punto della curva (5), cioè la posizione limite a cui tende la sfera circoscritta al tetraedro avente per vertici quattro punti della stessa quando questi tendano confondersi. Ora la (4) conduce subito alla seguente equazione di detta sfera:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} X^2+Y^2+Z^2-\Omega & X-x & Y-y & Z-z \\ \Omega' & x' & y' & z' \\ \Omega'' & x'' & y'' & z'' \\ \Omega''' & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0,$$

avendo posto per brevità

$$\Omega \equiv \Omega(t) = \overline{x(t)}^2 + \overline{y(t)}^2 + \overline{z(t)}^2.$$

Per porre questo risultato sotto forma più conveniente. Supponiamo di assumere come parametro t l'arco s della curva (5) e indichiamo con

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}$$

il determinante avente per elementi i coseni direttori delle direzioni positive della tangente, della normale principale e della binormale in un punto qualunque della curva stessa, finalmente con r, ρ i raggi di flessione e torsione; si ponga inoltre

$$U = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad V = \xi x + \eta y + \zeta z, \quad W = \lambda x + \mu y + \nu z. \tag{8}$$

Ricordando le note espressioni delle derivate delle coordinate di un punto della curva rispetto all'arco si trova:

$$x' = \alpha, \quad x'' = \frac{\xi}{r}, \quad x''' = -\left(\frac{\alpha}{r^2} + \frac{r'}{r^2}\xi + \frac{1}{r\rho}\lambda\right)$$

e le sei analoghe; inoltre

$$\Omega' = 2U, \quad \Omega'' = r\left(1 + \frac{V}{r}\right), \quad \Omega''' = -r\left(\frac{U}{r^2} + \frac{r'}{r^2}V + \frac{1}{r\rho}W\right);$$

perciò la (6) diviene

$$\begin{vmatrix} (X^2+Y^2+Z^2)-(x^2+y^2+z^2) & X-x & Y-y & Z-z \\ 2U & \alpha & \beta & \gamma \\ 2\left(1+\frac{V}{r}\right) & \frac{\xi}{r} & \frac{\eta}{r} & \frac{\zeta}{r} \\ -r\left(\frac{U}{r^2}+\frac{r'}{r^2}V+\frac{1}{r\rho}W\right) & -\left(\frac{\alpha}{r^2}+\frac{r'}{\rho}\xi+\frac{1}{r\rho}\lambda\right) & -\left(\frac{\beta}{r^2}+\frac{r'}{r^2}\eta+\frac{1}{r\rho}\mu\right) & -\left(\frac{\gamma}{r^2}+\frac{r'}{r^2}\zeta+\frac{1}{r\rho}\nu\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Togliendo dalla 1.ª verticale la 2.ª moltiplicata per x, la 3.ª per y e la 4.ª per z; poi, nel determinante risultante, dalla 4.ª orizzontale la 2.ª moltiplicata per $\frac{r}{r^2}$ e la 3ª per $\frac{r'}{r^2}$ si ottiene:

$$\begin{vmatrix} X^2+Y^2+Z^2-2xX-2yY-2zZ+x^2+y^2+z^2 & 2(X-x) & 2(Y-y) & 2(Z-z) \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ r & \xi & \eta & \zeta \\ -r'\rho & \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il primo membro e ricordando che il determinante (7) è ortogonale e vale $+1$ si arriva al seguente risultato:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2xX - 2yY - 2zZ + x^2 + y^2 + z^2$$
$$- 2r[(X-x)\xi + (Y-y)\eta + (Z-z)\zeta]$$
$$+ 2r'\rho[(X-x)\lambda + (Y-y)\mu + (Z-z)\nu] = 0.$$

Quest'equazione, essendo della forma

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2LX - 2MY - 2NZ + P = 0,$$

rappresenta la sfera di centro (L, M, N) e di raggio R tale che $R^2 = L^2 + M^2 + N^2 - P$; e si ha:

$$(9) \quad \begin{cases} L = x + r\xi - r'\rho\lambda, \quad M = y + r\eta - r'\rho\mu, \quad N = z + r\zeta - r'\rho\nu \\ R = r^2 + (r'\rho)^2 \end{cases}$$

d'accordo con risultati raggiunti per altra via [1]. *(continua)*

Genova, gennaio 1923.

[1] Cfr. G. Scheffers, *Einfühung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume*, II Aufl. (Leipzig, 1910) p. 317.