
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: G. Julia, S. Ruziewicz, W. Sierpinski

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 2 (1923), n.2, p. 63–69.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_63_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_63_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_63_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1923.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

Funzioni analitiche. — G. JULIA. *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes.* (« Ann. de l'École normale sup. », trois Mémoires, 1919, 1920, 1921).

Il celebre teorema di PICARD asseriva che una funzione uniforme avente in O un punto singolare essenziale isolato, prende infinite volte ogni valore in un cerchio di centro O arbitrariamente piccolo, eccettuati al più due valori — valori eccezionali. Le tre memorie qui riassunte hanno per scopo di precisare questo teorema, giungendo alla medesima conclusione in un dominio assai più ristretto, *che non circonda il punto singolare essenziale*. La *prima Memoria* studia l'andamento della funzione quando w si approssima al punto O con continuità lungo curve simili ad una curva data C . Si supponga O all'infinito. La curva C descritta dal punto $T = \sigma(t)$, dove t varia da 1 a $+\infty$, è arbitraria: si può supporre che essa vada da $+1$ a $+\infty$. Il punto $z\tau(t)$, con z fisso, descrive al variare di t , la curva zC ; ed è su queste curve zC che si studia l'andamento di $f(z)$, studiando la famiglia di funzioni $f_t(z) = f(z\tau(t))$ dipendente dal parametro reale t ed i punti dove essa famiglia non è normale. Accenniamo ai risultati essenziali.

Teorema fondamentale. « Per ogni funzione intera $f(z)$ e per « ogni curva Γ circondata l'origine, esiste almeno un punto z_0 ⁽¹⁾ « avente la seguente proprietà: $\mathfrak{D}_0$ essendo un cerchio arbitrariamente piccolo di centro z_0 , il punto $z\tau(t)$ ⁽²⁾ spazza intorno alla « curva z_0C una striscia Δ di apertura arbitrariamente piccola col « raggio di $\mathfrak{D}_0$, ed in questa striscia $f(z)$ prende infinite volte ogni « valore finito, salvo un valore eccezionale al più ». In particolare, se $\sigma(t) = t$, Δ è un angolo di apertura arbitrariamente piccola, e racchiudente il raggio σz_0 . Esempi: 1) $f(z) = e^z$, $\sigma(t) = t$; i punti z riempiono l'asse immaginario. 2) $f(z) = \sigma(z)$, la nota funzione intera

(1) In un tale punto z_0 la famiglia delle $f_t(z)$ non è normale.

(2) Dove t varia da 1 a $+\infty$, e z descrive $\mathfrak{D}_0$.

di WEIERSTRASS della teoria delle funzioni ellittiche: se C è una spirale, ogni punto del piano gode della proprietà fondamentale precedente.

La proprietà fondamentale si estende ad ogni funzione meromorfa avente almeno un valore asintotico, i valori eccezionali potendo essere allora due al più, finiti od infiniti. Esempi:

1) $thz = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$; per $\sigma(t) = t$, i z_0 riempiono l'asse immaginario.

2) Per la $\zeta(z)$ di WEIERSTRASS, per ogni C , ogni punto del piano possiede la proprietà fondamentale.

Segue da ciò che, salvo uno o due valori di a , le radici di ogni equazione $f(z) - a = 0$ si accumulano in vicinanza delle curve ζC , e, per esempio, i loro argomenti hanno almeno un valore limite comune.

Quando la $f(z)$ meromorfa non ha valore asintotico, è possibile di dividere il piano z in un'infinità di poligoni curvilinei finiti adiacenti, tali che in ognuno di essi $f(z)$ prende una sola volta ogni valore. Per $f(z) = \varphi(\log z)$, con φ doppiamente periodica coi periodi a' (reale) e $2\pi i$, $f(z)$ ammette σ e ∞ come punti singolari essenziali, senza valori asintotici. Fatto $\sigma(t) = t$, nessun punto del piano ammette la proprietà fondamentale: l'ipotesi dell'esistenza di un valore asintotico è dunque indispensabile se si vuole ritenere sicura l'esistenza delle striscie Δ di apertura arbitrariamente piccola in cui $f(z)$ prende ogni valore, eccettuato uno o due al più.

* * *

La seconda Memoria studia l'andamento di $f(z)$ quando si tende al punto essenziale $z = \infty$ mediante i punti $z, z\sigma, z\sigma^2, \dots, z\sigma^n, \dots$, σ numero complesso arbitrario di modulo > 1 . È fondamentale il teorema: « Per ogni funzione intera, o meromorfa con almeno un « valore asintotico, esiste per ogni σ (con $|\sigma| > 1$) un insieme E_σ « di punti aventi la seguente proprietà: Se $\mathcal{D}_0$ è un cerchio arbitra- « riamente piccolo circondante un punto di E_σ , e $\mathcal{D}_0\sigma, \mathcal{D}_0\sigma^2, \dots, \mathcal{D}_0\sigma^n$, « sono le aree consecutive, la funzione $f(z)$ assume infinite volte « ogni valore (salvo due al più, di cui uno è ∞ per le funzioni « intere) nell'insieme delle aree $\mathcal{D}_0\sigma^n$ ». I punti di E_σ sono quelli dove la famiglia delle funzioni $f_n = f(z\sigma^n)$ non è normale.

Proprietà di E_σ . Esso è chiuso, dipende da σ , contiene sempre 0 e ∞ ; è perfetto in casi molto generali. Può essere numerabile, come per la funzione intera d'ordine zero $\Pi \left(1 - \frac{z}{\sigma^n}\right)$: non è numerabile se la funzione meromorfa ha almeno due valori asintotici

distinti, finiti o no (1^∞ è valore asintotico per ogni funzione intera).

Per $f(z) = e^z$, 1) se $\arg \sigma$ è commensurabile con 2π , E_σ si compone di un numero finito di raggi intorno all'origine; 2) se $\arg \sigma$ è incommensurabile con 2π , ogni punto del piano appartiene ad E_σ . Questo insieme può dunque essere *continuo* (lineare o superficiale). Per la $\zeta(z)$ di WEIERSTRASS, E_σ contiene sempre tutto il piano. Può E_σ essere un insieme *perfetto discontinuo*; così è per la funzione intera di POINCARÉ soddisfacente a $f(\sigma z) = P(f(z))$, dove, nel polinomio $P(z) = \sigma z + z^p$, fissato σ , si prenda p *abbastanza grande*. Le funzioni meromorfe di P soddisfacenti ad equazioni funzionali del tipo $f(\sigma z) = R(z)$, dove R è razionale, danno esempi in cui E_σ è una curva di JORDAN priva di tangenti, o con punti doppi ovunque densi su di esso; E_σ può pertanto essere un continuo lineare di natura complicata.

Essendo z_σ qualunque in E_σ , i punti $z_0 \sigma_1^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, si avvicinano asintoticamente ad un'infinità di radici di ogni equazione $f(z) - a = 0$, salvo al più due valori di a : in altri termini, si può trovare una infinità di tali radici $z_1(a), z_2(a), \dots, z_p(a), \dots$ e di indici corrispondenti $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$, tali che $\frac{z_0 \sigma_1^n p}{z_p(a)}$ tenda ad 1 per $p \rightarrow \infty$. La successione n_i dipende evidentemente da a .

Per le funzioni meromorfe prive di valori asintotici, l'insieme E_σ può non avere punti distinti da 0 ad ∞ , mentre soli i punti di E_σ diversi da zero ed infinito offrono interesse per il nostro studio. Ecco tuttavia alcuni risultati generali.

Quando nella funzione meromorfa $f = \frac{G(z)}{G_1(z)}$ le funzioni intere G e G_1 non sono entrambe di ordine zero, 1) o esiste E_σ oltre a 0 e ∞ , 2) oppure, qualunque sia z_σ , l'insieme $z_n = f(z_\sigma \sigma^n)$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$) è denso in tutto il piano z .

Quando E_σ non esiste all'infuori di 0 ed ∞ , in qualunque altro punto del piano la famiglia delle $f_n = f(z \sigma^n)$ è normale. Si può allora asserire: 1°) o $f(z)$ prende ogni valore senza eccezione nell'insieme dei domini $\mathcal{D}_0 \sigma^n$ ($\mathcal{D}_0$ area arbitrariamente piccola attorno a z_0); ciò accade certamente quando nessuna funzione limite delle f_n si riduce a costante; 2°) oppure, se vi sono valori eccezionali che $f(z)$ non prende nelle $\mathcal{D}_0 \sigma^n$ ognuno di questi valori è una costante, limite della successione delle f_n , alla quale $f(z)$ tende uniformemente in una successione di domini $\mathcal{D}_0 \sigma^p$, $p \rightarrow \infty$; $\mathcal{D}_0$ può allora essere preso arbitrariamente grande, ma non contenente l'origine.

Tendendosi all'infinito con punti $z_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ ($p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

accade, per ogni funzione meromorfa di ordine > 2 , che 1°) o la successione delle $z_{pq} = f(z_0 + p\omega_1 + q\omega_2)$ è densa in tutto il piano z , 2°) od esiste un insieme E_{ω_1, ω_2} , in ogni punto del quale la famiglia $f_{n,q} = f(z + p\omega_1 + q\omega_2)$ non è normale. Per piccola che sia l'area $\mathfrak{D}_0$ circondante un punto z_0 di E_{ω_1, ω_2} , $f(z)$ assumerà infinite volte ogni valore finito od infinito (salvo due al più) nell'insieme delle aree $\mathfrak{D}_0 + p_1\omega_1 + q\omega_2$. La successione dei punti $z_0 + p\omega_1 + q\omega_2$ si avvicina allora indefinitamente ad un'infinità di radici di ogni equazione $f(z) - a = 0$, salvo al più due valori di a . Si noti che le funzioni doppiamente periodiche sono funzioni meromorfe di ordine 2.

Nella terza Memoria, essendo data una successione arbitraria di numeri complessi $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$ a modulo crescente indefinitamente, si studiano i valori che assume $f(z)$ nei punti $z\sigma_n$, considerando la famiglia delle $f_n(z) = f(z\sigma_n)$. È un'approssimazione discontinua irregolare del punto singolare essenziale all'infinito.

Sia E l'insieme dei punti dove la famiglia f_n non è normale: interessandoci soltanto i punti distinti da 0 ed ∞ . Per ogni funzione meromorfa a due valori asintotici almeno (o funzioni intere ad un valore asintoto finito) E esiste (all'infuori di 0 ed ∞) qualunque sia la successione σ_n . Nella successione delle aree $\mathfrak{D}_0\sigma_n$, $\mathfrak{D}_0$ arbitrariamente piccola intorno ad un punto z_0 di E , $f(z)$ prende infinite volte ogni valore finito od infinito, salvo due al più.

Limitandoci alle funzioni intere generali, E esiste sempre (all'infuori di 0 ed ∞), quando l'insieme dei punti $z_p(a): \sigma_n$ ($p, n = 1, 2, \dots, \infty$) ammette un punto limite z_0 distinto da 0 ed ∞ ; a è un numero finito e le $z_p(a)$ sono le radici di $f(z) - a = 0$. Ciò accade sempre: 1°) se la successione σ_n non cresce troppo rapidamente ($1 \leq \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} < Q$), 2°) oppure se gli zeri di $f(z)$ o di $f(z) - a$ non sono troppo rari ($1 \leq \frac{z_{p+1}}{z_p} < Q$).

E non può ridursi a 0 ed ∞ se non quando la σ_n cresce assai rapidamente, e se la funzione $f(z)$ ha zeri abbastanza rari perchè, qualunque sia a , l'insieme $z_p(a): \sigma_n$ non abbia altri punti limiti all'infuori di 0 ed ∞ ; $f(z)$ non dovendo inoltre avere valori asintotici finiti. Eccone un esempio: sia

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^{n^2}}\right), \quad q > 1, \quad |\sigma_n| = \sqrt{q^{n^2} q^{(n+1)^2}}.$$

Per questa funzione e per ogni regione $\mathfrak{D}$ non contenente 0 nè ∞ , i valori di $f(z)$ nei punti z_n (dove z descrive $\mathfrak{D}$) tendono uniformemente all' ∞ con n . Ma avendosi una funzione intera qualsiasi, la rapidità di crescita dei σ_n non basta a ridurre E a $(0, \infty)$, poichè data una successione σ_n , se ne può sempre formare una più rapidamente crescente s_n , per la quale l'insieme E esiste oltre a 0 ed ∞ .

Rimarrebbe ancora da studiare l'influenza, su E , della regolarità di crescita di $f(z)$ o della successione σ_n , e da vedersi se e fino a che punto i risultati ora indicati si possono estendere alle funzioni meromorfe. (Dall' Autore).

Funzioni. — S. RUZIEWICZ. *Sur les fonctions qui ont même dérivée et dont la différence n'est pas constante.* « Fund. Math. » 1920, pp. 148-151.

L'A. dà un esempio semplice di un'infinità di funzioni aventi la medesima derivata, finita o no, in tutti i punti di un intervallo, ma non differenti tra loro per una costante.

Il primo esempio di tale specie fu dato da H. HAHN (*Über den Fundamentalsatz der Integralrechnung*. Monatshefte für Math. und Phys., Bd. 16, 1905, pp. 161-166). l. t.

— W. SIERPINSKI. *Sur les rapports entre l'existence des intégrales*

$$(1) \quad \int_0^1 f(x, y) dx, \quad \int_0^1 f(x, y) dy$$

et

$$(2) \quad \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

« Fund. Math. », t. I, 1920, pp. 142-147.

L. LICHTENSTEIN. (*Prace matematyczno-fizyczne*, t. XXI, 1910, p. 11), dimostrò che, se $f(x, y)$ è una funzione definita nel campo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, ed ivi limitata, e se per essa esistono i due integrali (1), presi nel senso di RIEMANN, allora esistono anche l'integrale (2) e l'analogo

$$(3) \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx,$$

prendendoli entrambi nel senso di RIEMANN (ed essi sono uguali).

SIERPINSKI fa vedere che non avviene altrettanto se gli integrali, invece di essere presi nel senso di RIEMANN, sono degli integrali di LEBESGUE, e ciò ammettendo che la potenza del continuo sia aleph-uno. Mostra pure (ammettendo il postulato di ZERMELO) che l'esistenza, per una funzione limitata, degli integrali riemanniani (1), (2) e (3) non porta necessariamente quella dell'integrale superficiale

$$\iint_S f(x, y) dx dy,$$

preso nel senso di LEBESGUE.

l. t.

Funzioni. — W. SIERPINSKI. *Sur un problème de M. Lebesgue.*
« Fund. Math. », t. I, 1920, pp. 152-158.

LEBESGUE (*Sur les fonctions représentables analytiquement*, Journ. de Math., 6^e S., t. I, p. 199) aveva posto la questione di sapere se basta, per poter affermare che una funzione $f(x, y)$ è di classe α (classificazione di BAIRE) nel piano (x, y) , che essa sia di classe α su ogni retta $x = \text{cost}$ e su ogni curva $y = f(x)$; ed aveva risposto affermativamente, nel caso di $\alpha = 0$. Ora il SIERPINSKI dimostra che ciò è vero anche se è $\alpha = 1$; e che, invece, ammesso che la potenza del continuo sia aleph-uno, ciò non si verifica più, se è $\alpha = 2$.

l. t.

— W. SIERPINSKI. *Démonstration d'un théorème de M. Baire sur les fonctions représentables analytiquement.* « Fund. Math. », t. I, 1920, pp. 159-165.

L'A. dimostra nuovamente, ma senza l'uso dei numeri transfiniti e senza utilizzare la teoria degli insiemi misurabili B , il seguente teorema, dovuto a BAIRE: « ogni funzione rappresentabile analiticamente è puntualmente discontinua su ogni insieme « perfetto, quando si trascurino gli insiemi di prima categoria « rispetto a questo insieme perfetto ».

Rammentiamo che un insieme, contenuto in un insieme perfetto P , è detto di prima categoria, rispetto a P , quando è formato dalla riunione di un'infinità numerabile d'insiemi non densi su P .

l. t.

Funzioni. — SIERPINSKI. *Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire.* « Fund. Math. », t. I, 1920, pp. 132-141.

Diremo che una successione transfinita di numeri reali del tipo Ω (ove Ω indica il più piccolo numero della terza classe)

$$(1) \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\omega, \alpha_{\omega+1}, \dots, \alpha_\xi, \dots \quad (\xi < \Omega)$$

ha per limite il numero α , se esiste, per ogni numero positivo ε , un numero ordinale $\mu = \mu(\varepsilon) < \Omega$, tale che, essendo $\mu < \xi < \Omega$, sia anche $|\alpha_\xi - \alpha| < \varepsilon$. Diremo poi che una funzione di una variabile reale $f(x)$ è limite della successione transfinita (del tipo Ω) delle funzioni

$$(2) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \dots, f_\xi(x), \dots, \quad (\xi < \Omega),$$

se, per ogni x reale, questa successione ha per limite $f(x)$.

Ciò premesso, il SIERPINSKI dimostra:

a) che, se la successione di numeri reali (1) è convergente, tutti i suoi elementi sono uguali, da un certo punto in poi;

b) che, se la successione (2) è una successione convergente di funzioni continue, tutti i suoi elementi sono uguali, da un certo punto in poi;

c) che la funzione limite di una successione transfinita convergente (del tipo Ω), di funzioni di prima classe, è una funzione di classe ≤ 1 (classificazione di BAIRE);

d) che una successione transfinita (del tipo Ω), di funzioni di classe 2, può avere per limite una funzione che non sia una funzione di BAIRE.

l. t.