
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

OTTORINO POMINI

Lo smorzamento delle trepidazioni nei meandri lubrificati di certi giunti ed innesti meccanici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 2 (1923), n.2, p. 53–60.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_53_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_53_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_53_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1923.

**Lo smorzamento delle trepidazioni nei meandri lubrificati
di certi giunti ed innesti meccanici.**

Nota di OTTORINO POMINI ⁽³⁾

4. Elementi meccanici del problema. Pressione risultante, coppia resistente, rendimento.

È assai difficile stabilire come varii V , perchè Δp dipende ancora dalle proprietà dinamiche ed elastiche dei due sistemi meccanici, cui fanno capo le superficie limitanti il velo oliante.

⁽³⁾ Continuazione della nota a pag. 6.

Per concretare alcuna cifra utile alla disamina dei casi pratici, vista l'estrema picciolezza di h , noi porremo dapprima:

$$(14) \quad \frac{V}{h_1 - h_0} = \frac{nn'}{30}$$

ove n è il numero di giri che l'apparecchio compie al minuto primo, ed n' è il numero di volte che il ciclo dell'avvicinamento e susseguente allontanamento si effettua nel giro. Assumiamo cioè la velocità V come quella del moto di va e vieni effettuantesi uniformemente nello spazio $h_1 - h_0$ per n' volte, nel tempo $\frac{60}{n}$ secondi. Sostituendo (14) in (13) e scindendo l' h^3 :

$$(15) \quad \Delta p = 6\mu \frac{nn'}{30} \frac{h_1 - h_0}{h} \frac{a^2}{h^2}.$$

I seguenti valori numerici si corrispondono in un caso della pratica, sperimentato parecchie volte:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = 10^{-6} \text{ (a } 50^\circ \text{ C.) kg. sec./cm}^2. \\ n = 300 \text{ giri/min.} \\ n' = 3 \text{ volte} \\ a = 1 \text{ cm.} \\ h_1 = 0,04 \text{ cm.} \\ h_0 = 0,0081 \text{ cm.} \end{array} \right.$$

Per $h = h_0 = 81$ millesimi di millimetro, l'eccesso Δp è:

$$(17) \quad h = h_0) \quad \Delta p = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 3 \frac{0,0319}{0,81^3} 10^6 = 10,8 \text{ kg./cm}^2.$$

E nel caso più sfavorevole in cui $n' = 1$ si ha:

$$(17') \quad \Delta p = 3,6 \text{ kg./cm}^2.$$

Dalla (12), che può scriversi:

$$(12') \quad p_x = \frac{6\mu V}{h^3} (a^2 - x^2)$$

si ricava la pressione totale unitaria ($p \cdot \Delta y = 1$):

$$(18) \quad h = h_0) \quad P_1 = 2 \int_0^a \frac{6\mu V}{h^3} (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \frac{6\mu V a^3}{h^3}$$

$$P_1 = \frac{4}{3} a \cdot \Delta p.$$

Se la dentatura è normale, ad evolvente di 15° , tagliata al modulo M mm, larga l mm, e conta z^* denti:

$$\text{Pressione su di 1 dente)} \quad P_1 = \frac{4}{3} \frac{Ml}{100} \Delta p.$$

$$\text{Pressione su di } z^* \text{ denti)} \quad P_t = \frac{4}{3} \frac{Ml}{100} z^* \Delta p.$$

Ma $Mz^* = D_p$, diametro primitivo, onde:

$$(19) \quad P_t = \frac{4}{300} D_p \cdot l \cdot \Delta p$$

kg. mm. mm. kg/cm.

Il momento resistente totale è adunque:

$$(20) \quad M_r = P_t \frac{D_p}{2} = \frac{1}{150} D_p^2 \cdot l \cdot \Delta p.$$

Il rapporto fra il numero di cavalli e di giri al l' è:

$$(21) \quad \frac{N}{n} = \frac{M_r}{716200} = 9,3 \cdot 10^{-5} D_p^2 \cdot l \cdot \Delta p.$$

Ponendo, nel caso già citato, $D_p = 800$ mm., $l = 200$ mm., e $\Delta p = 3,6$ kg/cm², scende il valore:

$$N = 4,28n = 4,28 \cdot 300 \overline{=} 1280 \text{ HP.}$$

Praticamente il *Superpotente* riceve in questo caso il diametro $D_p = 1200$ mm. e dunque il momento resistente riesce vinto ancor prima che h scenda al decimo di millimetro.

Dimostrata l'esistenza della pressione idrodinamica emergente dal moto alterno fra le dentature coniugate con giuoco tangenziale, e dimostrato che l'intensità di questa pressione è sufficiente a vincere il momento delle coppie resistenti attuali; occorre verificare se il lavoro dovuto alla reazione di viscosità non sia causa di troppa dissipazione d'energia; o quanto meno non arrivi a produrre un riscaldamento soverchio dell'olio agente nell'apparecchio, sminuendogli il potere lubrificante.

Il lavoro $L_{h_1}^{h_0}$ fatto per centimetro lineare e per 1 dente,

contro la forza di viscosità, mentre le superficie passano dalla posizione h_1 alla h_0 è:

$$(22) \quad L = \frac{4}{3} a \int_{h_1}^{h_0} \Delta p dh = \frac{4}{15} \mu n n' (h_1 - h_0) a^2 \int_{h_1}^{h_0} \frac{1}{h^3} dh.$$

Considerato il valore assoluto, trascurato il termine $\frac{1}{h_1^2}$ a fronte di $\frac{1}{h_0^2}$, come pure lo h_0 a fronte di h_1 con che si stima il lavoro in eccesso, si ha:

$$(23) \quad L = \frac{2 \mu n n' h_1 a^3}{15 h_0^2}.$$

Così, per il sistema di valori ricordato:

$$\frac{L_{p.1cm.}}{p.z.=1} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 3 \frac{0,04}{(0,0081)^2} = 0,073 \text{ kgcm.}$$

$$L_t = 0,073 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 80 = 234 \text{ kgcm.} = 2,34 \text{ kgm.}$$

Compiendosi $300 \cdot 3 = 900$ cicli completi al minuto, si dovrà considerare lo sviluppo di circa 5 calorie al minuto. Questo calore è facilmente dissipato per convezione dall'apparecchio rotante. Supposta invece nulla la perdita per convezione, si può mantenere la temperatura interna sotto 50°C . adducendo 533 grammi d'olio al primo, a temperatura di 30°C . Praticamente, mai occorre di dover mutar olio. Il calore generato e dissipato corrisponde al lavoro sviluppato al minuto dalla potenza di 0,44 cavalli di 75 kgm./sec. e poichè l'apparecchio ne trasmette 1000 e più, così:

$$(24) \quad \text{Rendimento} = 1 - \frac{0,44}{1000} = 99,56 \text{ } \%.$$

Resta così giustificata la perfetta conservazione dell'olio.

5. *L'equazione del moto integrata per una coppia sinusoidale.*

I problemi di meccanica degli assi motori attuali, sollecitati essenzialmente da coppie, si possono risolvere pensando la coppia risultante scissa in due: di cui la prima è costante, ed ha il valor competente alla potenza trasmessa; l'altra invece è alternativa e risulta dall'andamento della coppia motrice. Nel caso in esame, questa seconda coppia varia a un bel circa sinusoidal-

mente, ed i suoi principali effetti sul fluido viscoso racchiuso nella capsula dentata possono essere valutati esattamente.

La forza motrice ridotta sulla primitiva D_p è:

$$(25) \quad F = \frac{M_r}{\frac{1}{2} M z^*} = \frac{2M_r}{az^*}$$

$$(26) \quad F = F_{max} \cdot \sin \frac{2\pi nn'}{60} t$$

ove t è il tempo ed F_{max} è l'ampiezza della forza sinusoidale ridotta su D_p . Richiamando le espressioni già trovate e congruando:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{6\mu a^2 V}{h^3} \text{ kg/cm}^2. \\ P_1 &= \frac{4}{3} a \cdot \Delta p = \frac{8\mu a^3 V}{h^3} \text{ kg cm.} \\ P_t &= P_1 \cdot l \cdot z^* = \frac{8\mu a^3 l z^* V}{h^3} \text{ kg.} \\ (27) \quad \frac{8\mu a^3 l z^* V}{h^3} &= F_{max} \cdot \sin \frac{2\pi nn'}{60} t. \end{aligned}$$

Introducendo l'espressione della velocità in funzione dello spazio S , e dicendo h_1 ed h_0 le distanze iniziale e finale fra le superficie lavoranti:

$$\frac{8\mu a^3 l z^*}{(h_1 - S)^3} \cdot \frac{dS}{dt} = F_{max} \cdot \sin \frac{2\pi nn'}{60} t.$$

Separando le variabili:

$$(28) \quad \sin \frac{2\pi nn'}{60} t dt = \frac{8\mu a^3 l z^*}{F_{max}} \cdot \frac{dS}{(h_1 - S)^3}.$$

Integrando fra i limiti $t=0$ per $S=0$, e $t=\frac{30}{nn'}$ per $S=h_1-h_0$, si ha:

$$(29) \quad -\frac{60}{2\pi nn'} \left[\cos \frac{2\pi nn'}{60} t \right]_0^{\frac{30}{nn'}} = \frac{8\mu a^3 l z^*}{F_{max}} \int_0^{h_1-h_0} \frac{dS}{(h_1-S)^3}$$

$$(29') \quad -\frac{60}{2\pi nn'} [-1-1] = \frac{8\mu a^3 l z^*}{F_{max}} \left[\frac{1}{2(h_1-S)^2} \right]_0^{h_1-h_0}.$$

Sostituendo, eliminando e trascurando la reciproca di h_1^2 a fronte di quella di h_0^2 , che la supera cento volte:

$$(30) \quad h_0 = \sqrt{\frac{\pi \mu a^3 l z^* nn'}{15 F_{max}}}.$$

La quale è l'espressione della distanza h_0 a cui la coppia motrice sinusoidale spinge alternativamente le superficie lavoranti, partendo dalla distanza h_1 .

Per concretare l'applicazione pratica, occorre definire la F_{max} in funzione degli elementi principali dell'asse. Generalmente, cioè nell'assenza di notevoli masse volanti, la forza risultante massima è doppia della minima, onde l'agente forza sinusoidale varia fra (kg. e cm.)

$$(31) \quad \begin{aligned} \pm \frac{1}{3} R_m &= \pm \frac{1}{3} \frac{71620 N}{\frac{1}{2} a z^* n} \text{ kg.} \\ F_{max} &= \frac{48000 N}{a z^* n} \text{ kg.} \end{aligned}$$

Sostituendo (31) in (30) con $\mu = 10^{-6}$ kg. sec./cm.²:

$$h_0 = 2 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{a^4 z^{*2} l n^2 n'}{N}}.$$

E ricordando che $a z^* = D_p$:

$$(32) \quad h_0 = 2 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{a^2 l n'}{N}} D_p \cdot n.$$

Così, per $D_p = 120$ cm.; $n = 300$; $n' = 3$; $a = 1$; $l = 20$ e considerata la potenza massima di 3000 cavalli:

$$h_0 = 2 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{1 \cdot 20 \cdot 3}{3000}} 120 \cdot 300 = 0,011 \text{ cm.}$$

cioè poco più d'un decimo di millimetro. Evidentemente, se nel taglio delle dentature vi fosse difetto tale, che una coppia di denti venisse a contatto quando tutte le altre si trovassero a più di 0,11 mm. di distanza, questa difettosa coppia batterà reiteratamente durante la marcia, causando rumori molesti.

Il cammino relativo $h_1 - h_0$ che le dentature compiono al sopravvenire d'un urto e conseguente reazione elastica, va spegnendosi sotto l'azione della coppia costante che trasmette il lavoro. Il tempo teoricamente richiesto per isvanire detta escursione è infinito. Praticamente le superficie di lavoro non verranno mai a bruschi contatti, perchè la loro velocità relativa tende a zero collo svanire dell'oscillazione ed anche perchè l'annullarsi dell'ultimo velo oliante richiede una forza infinitamente grande. Dal lato costruttivo importa preoccuparsi soltanto della prima fase del moto disturbato.

Nel caso in cui l'impulso motore e la successiva reazione elastica riescono a suscitare una coppia negativa alternantesi col maggiore impulso positivo, le corone oscilleranno permanentemente innanzi od indietro senza mai toccarsi, eppure trasmettendo il competente lavoro motore. La escursione continua ch'esse compiono risulta dal vano fra i denti diminuito della somma $h_0' + h_0''$ dello spessore h_0' spettante alla fine dell'impulso positivo, con lo spessore h_0'' che il velo oliante riceve alla fine dell'impulso negativo ($h_0' < h_0''$). La potenza che si perde in questo moto perturbato può essere calcolata d'accordo al modo chiarito al n.° 4 e la sua grandezza ascende — nei casi analoghi a quello accennato al n.° 6 — a cifra dell'ordine dianzi trovato.

6. Applicazioni pratiche.

La natura del fenomeno fisico che abbiamo studiato — sintetizzata dall'equazione (13) — e la forma dell'integrale (29) lasciano ritenere che lo spessore effettivo del velo oliante possa essere avuto dalla considerazione della perturbazione ciclica del numero precedente, quando ad F_{max} si assegnino successivamente il valore proprio dell'impulso motore e quello determinante la vicenda della reazione elastica. Questi due valori non possono sempre essere calcolati esattamente; anzi talvolta non sono affatto calcolabili. Invero, la forza è pure funzione dello spazio (dipendendo anche dalla reazione elastica) e le due variabili non sono palesemente separabili, come in (28). Indagando in questo verso, si trovano integrali trascendenti misti, refrattari alla trattazione esatta, e richiedenti un enorme lavoro d'analisi per essere integrati in serie. Il campo di integrazione è da zero a π , e quindi più non sovengono certe conosciute serie trigonometriche, validi per archi minori dell'unità.

Coteste indagini — che sono veramente estranee al problema che stiamo trattando — possono essere praticamente schivate ricorrendo ai rilievi dinamometrici delle ricerche sperimentali. Definito il secondo membro della (27) sia per l'impulso motore, che per il susseguente impulso dovuto alla reazione elastica, si applichi la (29) ad entrambi gli impulsi. Si otterranno due equazioni definite (29') contenenti ognuna la coppia di termini $\frac{1}{h_1^2}$ ed $\frac{1}{h_0^2}$. Siccome la posizione finale di ciascuna fase coincide con l'iniziale dell'altra, e non han luogo spessori negativi, così le due equazioni offrono la soluzione univoca del problema. Ove si

trascuri $\frac{1}{h_1^2}$ a fronte di $\frac{1}{h_0^2}$, il risultato è dato dalla (30) con F_{max} pari al valore competente alle due vicendevoli fasi. Come esempio citiamo il caso di una installazione disgraziata, nella quale l' F_{max} motore ascendeva a 7 volte quello considerato nell'ultimo esempio, mentre l'impulso della reazione elastica era quasi *quadruplo* di quello già considerato: caso d'imminente *vibrazione torcente*. Or bene, lo spessore del velo oliante fra le dentature del *Superpotente* che si fosse sistemato in quella disgraziata linea d'assi sarebbe risultato di:

$$h_0' = 0,11 \sqrt{\frac{1}{7}} = 0,041 \text{ mm.} \quad h_0'' = 0,11 \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,055 \text{ mm.}$$

Questa installazione dovette essere modificata ancor prima di applicarvi l'innesto; ma se avesse posseduto l'innesto da nuova, non si sarebbe rovinata, come fece.

Concludo con un'ultima avvertenza. L'equazione (27) può essere scritta in assai modi: purchè alla F si dia una forma di cui si conosca l'integrale. Talvolta bastò scrivere la F costante — ma diversa — in ciascuna delle due alternantisi fasi. Il risultato può consigliare di aumentare la grandezza dell'apparecchio, oppure di diminuirla, mettendola pure in relazione col grado di esattezza con cui sono rifiniti i meandri delle dentature. Ad ogni modo la scelta dell'apparecchio, conformemente alla potenza da trasmettere, è sufficiente ad assicurare l'installazione contro il pericolo di sfasciamento cui vanno incontro tali linee d'assi, sprovviste di tali apparecchi.

7. Conclusione.

Negli apparecchi accennati, le bolle gassose sono spinte e tenute fuori dal contatto delle superficie lavoranti, le quali sono costantemente immerse in una massa d'olio avente riconosciuto grado di viscosità.

Dal moto alterno di va e vieni, dovuto alle perturbazioni cicliche del moto rotatorio, nasce sulle opponentisi superficie di lavoro una pressione idrodinamica, la cui intensità è più che sufficiente a vincere il momento delle attuali coppie resistenti.

La perdita d'energia nel moto perturbato è inferiore al 2 per mille ed è affatto inutile preoccuparsi dei suoi effetti. L'olio più conveniente per questi apparecchi è il puro olio di ricino.

Castellanza, giugno 1922.