BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI BIANCHI

Sopra una classe di sistemi tripli ortogonali di Weingarten

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.2, p. 41–47.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_2_41_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

PICCOLE NOTE

Sopra una classe di sistemi tripli ortogonali di Weingarten.

Nota di Luigi Bianchi

1. Nelle antiche mie ricerche (1884-85) sui sistemi tripli ortogonali contenenti una serie di superficie colla medesima curvatura costante (sistemi di Weingarten), il primo di siffatti sistemi che mi si è offerto è il singolare sistema triplo elicoidale nel quale ciascuna serie è formata di elicoidi a curvatura costante congruenti fra loro per traslazione lungo l'asse comune. Qualunque elicoide a curvatura costante, positiva o negativa, individua un tale sistema triplo elicoidale colla proprietà che, nelle tre serie, due delle curvature sono negative, una positiva e la somma è nulla (1).

In una memoria del 1901, estratta dalla sua tesi di laurea (2), il Carnera ha dimostrato che questo sistema è *essenzialmente* l'unico formato di superficie a curvatura costante in tutte tre le serie, pure ammettendo, in ciascuna serie, la curvatura variabile dall'una all'altra superficie. Nella presente nota, limitandomi per brevità al caso della curvatura assolutamente costante in una famiglia di Lamé (sistemi di Weingarten), risolvo una questione molto più generale ricercando quei sistemi di Weingarten, non costituiti da superficie di rotazione o da sfere, nei quali *una* soltanto delle superficie *secondarie* nel sistema (appartenente ad una delle altre due serie) sia supposta essa stessa a curvatura costante.

Proveremo che l'unica soluzione è fornita ancora dal sistema triplo elicoidale, a meno che la detta superficie secondaria sia una sfera od un piano. In quest'ultimo caso si proverà che esistono in effetto infiniti sistemi di Weingarten, *dipendenti da due funzioni*

(1) V. p. es. le mie *Lezioni di geometria differenziale*, 1ª ediz., § 304. 2ª ediz., II, § 443.

(2) « Giornale di matematiche », vol. 39, pag. 61-80.

arbitrarie, nei quali tutte le superficie a curvatura costante della serie sono ortogonali ad una sfera, ovvero ad un piano, e se ne darà la determinazione geometrica.

2. Per compiere l'indicata ricerca si ricorrerà ad una proprietà colla quale ho caratterizzato le superficie secondarie in ogni sistema di Weingarten (1). Sia la superficie S secondaria in un sistema di Weingarten a curvatura costante c (non nulla), che venga tagliata ortogonalmente lungo le sue linee di curvatura $u = \text{cost}^{\text{te}}$ dalle superficie a curvatura costante c della famiglia, e sia

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2 \tag{1}$$

il suo ds^2 riferito alle linee di curvatura (u, v).

L'indicata relazione *caratteristica* si scrive

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) = c\sqrt{EG} \qquad (^2). \tag{2}$$

Questa è la condizione necessaria e sufficiente affinchè le serie di superficie a curvatura costante c, individuate dal tagliare ortogonalmente la S lungo le linee di curvatura $u = \text{cost}^{\text{te}}$, appartengano ad un sistema di Weingarten (*nc*).

Ciò premesso, suppongasi che la superficie S, secondaria in un sistema di Weingarten, abbia la curvatura K costante, ma dapprima *non sia nè una sfera nè un piano*. Il caso $K = 0$ si esclude subito, perchè l'ipotesi di S sviluppabile (non piana) è inconciliabile, come facilmente si vede, colla condizione (2).

(1) *Sulle superficie secondarie nei sistemi tripli ortogonali pseudosferici* (Rendiconti Lincei, vol. 26, serie 5ª, luglio 1917).

(2) Si può dare a questa condizione una forma che ne ponga in evidenza il carattere *invariantivo* rispetto ai cangiamenti di parametri ove si introduca la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho}$ delle linee $u = \text{cost}^{\text{te}}$ che è data, in grandezza e segno, da

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Allora la (2) prende la forma equivalente:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2} + c = 0,$$

dove il simbolo $\frac{\partial}{\partial n}$ significa derivazione nel senso normale (positivo) alle $u = \text{cost}^{\text{te}}$.

Essendo dunque $K \neq 0$, possiamo supporre, senza alterare la generalità,

$$K = -1, \quad \text{ovvero} \quad K = +1,$$

secondo che K è negativa, o positiva; e basterà considerare il primo caso $K = -1$, l'altro $K = +1$ consentendo una trattazione del tutto analoga.

La S essendo pseudosferica di raggio $= 1$, il suo ds^2 riferito alle linee di curvatura (u, v) sarà

$$ds^2 = \cos^2 \theta du^2 + \text{sen}^2 \theta dv^2,$$

dove θ è una soluzione della equazione del secondo ordine

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = \text{sen}\, \theta \cos \theta.$$

Ora la (2) diventa nel caso attuale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = c \,\text{sen}\, \theta \cos \theta,$$

e unita alla precedente dà il sistema:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} = c \,\text{sen}\, \theta \cos \theta \\ \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = (c - 1) \,\text{sen}\, \theta \cos \theta \end{cases}$$

di cui è agevole determinare tutte le soluzioni. Una prima integrazione separata delle (3) dà subito

$$(4) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 = V + c \,\text{sen}^2 \theta \\ \left(\dfrac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 = U + (c - 1) \,\text{sen}^2 \theta, \end{cases}$$

con U funzione di u, e V funzione di v soltanto. D'altra parte una prima derivazione delle (3), la prima rapporto a v, la seconda rapporto ad u, porge:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 \theta}{\partial u^2 \partial v} = c \cos 2\theta \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^3 \theta}{\partial u \partial v^2} = (c - 1) \cos 2\theta \cdot \dfrac{\partial \theta}{\partial u}, \end{cases}$$

e con una nuova tale derivazione si ha la condizione d'integrabilità

$$c\frac{\partial}{\partial v}\left(\cos 2\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial v}\right) = (c-1)\frac{\partial}{\partial u}\left(\cos 2\theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial u}\right).$$

Sviluppando, con riguardo alle (3) e (4), resta

$$cU = (c-1)V,$$

e se c, già supposta diversa da zero, è anche diversa da 1, ne segue

$$U = (c-1)a, \quad V = ca \quad (a \text{ costante}),$$

e le (4) diventano

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 &= c(a + \operatorname{sen}^2 \theta) \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 &= (c-1)(a + \operatorname{sen}^2 \theta). \end{aligned}\right.$$

Queste formole dimostrano che la S è *un'elicoide pseudosferica* (1), e da quanto si è già osservato al n. 1 risulta che il sistema di Weingarten coincide col sistema triplo elicoidale individuato da S. Il caso escluso $c = 1$ non è che un caso particolare di questo con due serie di superficie di rotazione coassiali a curvature costanti eguali ed opposte, e la terza dei piani meridiani.

Concludiamo pertanto: *Se in un sistema di Weingarten una delle superficie delle altre due serie ha costante la curvatura e non è nè una sfera nè un piano, il sistema coincide col sistema triplo elicoidale (o con una delle sue degenerazioni).*

3. Resta che ricerchiamo i sistemi di Weingarten le cui superficie a curvatura costante sono tutte ortogonali ad una sfera o ad un piano fisso. Cominciamo dal caso della sfera, che potremo supporre di raggio $R = 1$; e si tratterà di determinare i ds^2 della forma ortogonale (1) e di curvatura $K = +1$, pei quali dunque sussiste la relazione

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) = -\sqrt{EG}$$

(1) Vedi *Lezioni*, 3ª edizione, § 250, vol. I, pag. 689.

ed insieme la (2), ossia di trovare le soluzioni del sistema differenziale

$$
(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) = c\sqrt{EG} \\ & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = -(c+1)\sqrt{EG}. \end{aligned} \right.
$$

La seconda di queste equazioni è la simmetrica della prima, scambiato u con v, e cangiato c in $-(c+1)$, onde segue che, se si suppone $c \neq -1$, le superficie di curvatura costante $-(c+1)$, individuate dalla condizione di segare ortogonalmente la sfera lungo le linee $v = \text{cost}^{\text{te}}$ formeranno un *nuovo* sistema di Weingarten (¹). Si osservi anche che il caso qui escluso $c = -1$ non è veramente eccezionale; soltanto che il secondo sistema di Weingarten viene allora sostituito dai coni che proiettano dal centro della sfera le linee $v = \text{cost}^{\text{te}}$.

Quanto al problema di trovare tutti i sistemi ortogonali sferici pei quali sono verificate le relazioni (5), esso trovasi completamente risoluto in una mia memoria del 1915 (²). Geometricamente la sua risoluzione dipende, in modo notevole, dalle congruenze pseudosferiche secondo la costruzione ivi indicata:

Si consideri una qualunque congruenza pseudosferica reale, le cui sviluppabili possono essere reali ovvero immaginarie, distinte o coincidenti e si costruisca l'immagine sferica dei raggi delle congruenze. Quelle linee (sempre reali) della sfera che corrispondono alle asintotiche delle due falde focali dànno i sistemi ortogonali richiesti.

Rimandando alla memoria citata per la suddistinzione dei varii casi possibili, qui osserviamo ancora che per definire un sistema doppio ortogonale sferico della specie si possono assegnare ad arbitrio, sulla sfera, due curve C e Γ del sistema che si taglino ortogonalmente in un punto.

4. Venendo da ultimo al caso dei sistemi di Weingarten ortogonali ad un piano fisso, si tratterà di trovare tutti i ds^2 ortogonali a curvatura nulla, soddisfacenti alle due condizioni che

(¹) Che si tratti di un sistema nuovo, rispetto all'altro delle superficie a curvatura costante c condotte per le linee $u = \text{cost}^{\text{te}}$ normalmente alla sfera, è un'immediata conseguenza del risultato finale al n.° precedente.

(²) *Sopra una classe di superficie collegate alle congruenze pseudosferiche* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 40).

sostituiscono le (5):

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)=c\sqrt{EG} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)=-c\sqrt{EG}. \end{cases}$$

La costante c (non nulla) si può evidentemente supporre negativa, poniamo

$$c=-\frac{1}{R^2},$$

e da ogni sistema doppio ortogonale del piano della specie si avranno *due* sistemi di Weingarten, l'uno formato dalle superficie pseudosferiche di raggio $=R$ ortogonali al piano lungo le linee $u=\mathrm{cos}^{\mathrm{te}}$, l'altro di superficie applicabili sulla sfera di raggio R condotte per le linee $v=\mathrm{cost}^{\mathrm{te}}$ normalmente al piano.

Gli elementi lineari piani corrispondenti alle (6) si distinguono in tre tipi, secondo le osservazioni seguenti. Una prima integrazione delle (6) $\left(\text{con } c=\frac{1}{R^2}\right)$ ci dà, disponendo dei parametri u, v:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2+\frac{G}{R^2}=1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2-\frac{E}{R^2}=b \qquad (b \text{ costante})$$

Basta suddistinguere secondo il segno di b nei tre casi

$$\alpha)\ b=1, \quad \beta)\ b=-1, \quad \gamma)\ b=0,$$

ed in tutti tre i casi potremo introdurre un angolo ausiliario φ e porre

$$\sqrt{G}=R\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad \sqrt{E}=R\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Successivamente nel caso α) introduciamo una seconda ausiliaria θ ponendo

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\cosh\theta, \quad \sqrt{E}=R\,\mathrm{senh}\,\theta,$$

ed avremo

$$(A) \qquad ds^2=R^2(\mathrm{senh}^2\theta\,du^2+\mathrm{sen}^2\varphi\,dv^2),$$

colle funzioni θ, φ legate dalle equazioni caratteristiche

$$(a) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}=\mathrm{senh}\,\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial v}=\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Similmente nel caso β) avremo

$$ds^2 = R^2(\cosh^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2) \tag{B}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \cosh\theta, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \operatorname{sen}\varphi. \tag{b}$$

Infine nel caso γ):

$$ds^2 = R^2(e^{2\theta}\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2) \tag{C}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = e^{\theta}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{sen}\varphi. \tag{c}$$

I teoremi d'esistenza per gli integrali dei sistemi differenziali, applicati alle equazioni (a) e (b), provano che si possono assegnare ad arbitrio, nel piano, due curve C e Γ del sistema, p. es. la $u = 0$ e la $v = 0$, colla differenza che nel primo caso la curva Γ dovrà avere in ogni punto un raggio di curvatura minore di R, nel secondo invece maggiore. Quanto al terzo caso (C) è da osservarsi che qui le linee $v = \text{cost}^{\text{te}}$ sono circoli tutti di raggio $= R$, rimanendo arbitraria una delle traiettorie ortogonali, ed i sistemi di Weingarten sono sistemi ciclici di Ribaucour.

Queste ultime osservazioni e le analoghe alla fine del n.° precedente si ravvicinino ora alla nota proprietà che, per individuare un sistema di Weingarten, si può assegnare ad arbitrio una superficie Σ nella serie a curvatura costante, insieme ad una delle curve traiettorie ortogonali della serie. Per la generazione dei sistemi di Weingarten ortogonali ad una sfera o ad un piano ne risulta la costruzione generale seguente:

Sulla sfera (sul piano) si tracci ad arbitrio una coppia di curve C, Γ uscenti da un punto, in direzioni ortogonali. Fissata la curvatura costante $c \neq 0$ che deve avere il sistema di Weingarten, si faccia passare per la curva C la superficie Σ, colla curvatura costante c, individuata dalla condizione di tagliare ortogonalmente lungo C la sfera (o il piano). Il sistema di Weingarten individuato dalla superficie Σ e dalla trajettoria ortogonale Γ è costituito di superficie a curvatura costante c tutte ortogonali alla sfera (al piano) e dà il più generale sistema richiesto.

Quanto alla ricerca effettiva dei sistemi doppî ortogonali di linee segnati sulla sfera o sul piano dai sistemi di Weingarten in considerazione, si può dimostrare che sono qui applicabili le trasformazioni di Ribaucour colle quali da un tale sistema noto se ne possono far derivare infiniti nuovi.