
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

OTTORINO POMINI

Lo smorzamento delle trepidazioni nei meandri lubrificati di certi giunti ed innesti meccanici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 2 (1923), n.1, p. 6-13.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_1_6_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_1_6_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_1_6_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Lo smorzamento delle trepidazioni nei meandri lubrificati
di certi giunti ed innesti meccanici.**

Nota di OTTORINO POMINI

1. *Dell'urto nascente dal lasco nelle macchine. Attitudine d'uno strato vischioso a resistere all'urto.*

È noto che la esistenza di un giuoco sensibile fra le superficie portanti degli organi meccanici, trasmettenti sforzi alterni, è causa fatale di consumo e di rovina di dette parti. I meccanici di cent'anni fa insistevano sulla diligenza dell'aggiustatura, ed i costruttori odierni sono riusciti a ridurre il lasco al minimo

compatibile con l'esattezza di esecuzione e con la sicurezza di buon funzionamento. Sempre però necessita disporre le superficie lavoranti per modo che esse risultino costantemente separate da uno strato continuo di lubrificante. Nei sopporti è il perno girevole, che trascina seco la quantità d'olio necessaria a mantenere la continuità del velo vischioso. Nei giunti *Intrepido*, *Pantocinet*, *Surpotente* ed *Ultra*, ideati e costruiti dallo scrivente, ed ampiamente descritti nella letteratura tecnica ⁽¹⁾, l'olio è imprigionato nel meccanismo; ed è mantenuto aderente al fianco delle corone dentate dall'azione stessa della forza centrifuga. La schiuma, eventualmente prodotta dagli sbattimenti dovuti ad irregolarità di marcia, è sospinta fuor dal contatto de' denti, e si raccoglie all'interno dell'anello lubrificante; mentre la parte di questo anello, entro cui sono immersi i denti, è essenzialmente costituita da materia lubrificante liquida, godente appieno il grado di vischiosità dell'olio adoperato.

Evidentemente, non è possibile alterare la posizione relativa delle dentature, nel senso del moto, senza costringere una certa quantità di olio ad uscire dal contatto dei denti che s'avvicinano e ad accumularsi dietro di essi. Reciprocamente, l'azione di coppie o di forze, dirette in senso opposto delle prime, potrà riportare i denti nella primitiva posizione, sol quando quella certa quantità d'olio sia stata risospinta fuor dalle parti posteriori e risucchiata negli interstizii anteriori. Naturalmente la quantità d'olio che compie il ciclo è commisurata alla grandezza dell'impulso alternativo. Una rapida analisi preliminare del moto d'una massa vischiosa, compressa fra due superficie quasi piane, parallele, infinitamente estese, avvicinantisi con velocità finita e costante, indica che la pressione suscitata negli strati vischiosi cresce col cubo della reciproca della distanza. Se dunque si rifiniscono con esattezza grande a piacere le superficie lavoranti, si può evitare il contatto immediato in quasi tutti i casi della pratica. Solitamente gli organi delle macchine sono così proporzionati da poter trasmettere sicuramente la pressione del lavoro, senza distendere lo strato d'olio a spessore molecolare. Nel caso attuale e nelle condizioni peggiori di funzionamento, lo strato lubrificante riesce spesso — alla fine di ciascun impulso — un ventesimo di millimetro; mentre di regola esso s'assottiglia a non meno di $\frac{1}{10}$ mm. (costruzione e funzionamento normali).

⁽¹⁾ Cfr. *Engineering* per l'anno 1922, pag. 70 e segg. e Tav. III; *Costruzione di Macchine*, vol. II, 2^a ed., pag. 493 e segg., ecc.

La differenza sostanziale fra i due modi di trasmissione dell'impulso negli organi delle macchine (e cioè per contatto immediato, oppure per l'intermedio del lubrificante) sta nella durata del fenomeno. Invero la distribuzione della tensione sulle superficie lavoranti non ha praticamente alcun effetto sulle parti del sistema sollecitato: e questa differenza di distribuzione nella tensione può anche mancare del tutto. Ma il tempo durante il quale avviene la trasmissione dell'impulso è cento, mille volte maggiore nel contatto mediato che non in quello immediato, onde la intensità della massima forza istantaneamente suscitata durante la trasmissione dell'impulso è a mille doppi maggiore nell'urto immediato. Per un esempio, il cozzo di due palle di biliardo dura $\frac{1'}{20000}$; mentre il fenomeno dell'urto mediato dal

lubrificante, nei giunti sullodati, dura $\frac{1''}{15}$. Se le palle da biliardo si ricoprono d'esile strato di cera, la durata di trasmissione dell'impulso riesce centuplicata; infine, questa durata dell'urto negli apparecchi in questione, scende alla millesima parte della cifra dichiarata ove le dentature funzionino a secco, oppure fossero difettosamente tagliate. Gli sbattimenti provocati in questi casi disgraziati sono così energici da causare la rottura dei vetri delle finestre nella sala di prova. La testimonianza di cento prove ben riuscite non toglie il dubbio nato da una prova disastrosa. Ma la dimostrazione scientifica dell'impossibilità di provocare tali disastrosi sbattimenti negli apparecchi in questione, funzionanti a fianco de' più gagliardi motori Diesel, privi di volante, esclude ogni dubbio sull'attitudine dello strato vischioso ad impedire la conflagrazione dei denti. La resistenza opposta dalla massa vischiosa contro alle azioni che tendono ad espellerla dagli interstizii, vincola siffattamente la parte motrice alla parte mossa, che l'impulso proveniente da una di quelle parti s'ammorza *nella massa di tutto il sistema*; mentre nell'assenza del lubrificante le due parti rimangono staccate e libere di accelerare la velocità dell'urto, come accade quando una delle due parti — rimasta libera — riceve un nuovo impulso motore, che la fa galoppare innanzi. Le due parti cozzano allora insieme con velocità relativa notevolissima. Talvolta accadde che l'albero motore, reiteratamente scosso da urti, si distorceva gradatamente, sfalsando il comando del cassetto distributore. Tal altra cedettero i collegamenti a chiavetta. Infine, è accaduto dover constatare un riscaldamento violento ed immediato in una zona limitata di linea d'asse, tra il motore a combustione interna ed il motore elettrico

(a bordo d'un sommergibile) con conseguente rottura del giunto a flange. Questa linea d'assi fu completamente sistemata sostituendo il giunto a denti di cui era provvisto il motore Diesel, con un innesto *Surpotente* di nostra costruzione.

Affatto indipendentemente dalla sanzione pratica e sperimentale, noi vogliamo ora dimostrare per via analitica, e partendo dalle equazioni fondamentali della *Meccanica dei corpi deformabili* che è sempre possibile di mantenere uno strato oliante, spesso non meno d'un decimo di millimetro, fra le dentature telescopiche degli apparecchi in questione, pur quando una delle parti che li costituiscono riceve e trasmette all'altra parte una coppia sinusoidale, come occorre ai motori Diesel, privi di volante.

2. Derivazione di un sistema particolare di equazioni per l'equilibrio dei fluidi viscosi.

Le equazioni indefinite per l'equilibrio di un corpo continuo:

$$(1_x) \quad \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$(1_y) \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$(1_z) \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + Z = 0$$

si lasciano trasformare analiticamente, per la legge di Hooke nell'equazioni dell'equilibrio elastico:

$$(2_x) \quad \Delta_x \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0$$

$$(2_y) \quad \Delta_y \eta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0$$

$$(2_z) \quad \Delta_z \zeta + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0$$

ove m è l'inverso del coefficiente di POISSON;

e è dilatazione cubica;

G è il modulo di rigidità;

Δ_x è l'operatore di LAPLACE.

Le equazioni (2) possono essere applicate alla soluzione dei problemi sul moto del lubrificante fra le superficie lavoranti delle macchine, osservando che:

a) le forze di massa possono essere trascurate di fronte alla reazione provocata dalla viscosità;

b) il lubrificante è ritenuto incompressibile, sì come praticamente appare quando è esente da bolle o schiume;

c) la reazione di viscosità è in ragione diretta del coefficiente di viscosità μ e della velocità relativa fra due strati posti all'unità di distanza.

Un modo di effettuare la trasformazione in parola scende dall'osservare che la forza elastica, destata nello scorrimento mutuo, è G volte lo scorrimento unitario; mentre la forza di viscosità dei veli olianti è $\mu \frac{\partial}{\partial t}$ volte questo scorrimento. Si pren-

dano dunque $\mu \frac{\partial}{\partial t}$ volte quei termini che in (2) sono presi G volte, si trascurino i termini di cui in a), b) e scenderanno l'equazioni richieste. Il tecnicismo analitico s'abbrevia tenendo presenti i sistemi d'equazioni (1) e (2). Il secondo termine di queste è nullo, ed il primo termine è da prendere ancora $\mu \frac{\partial}{\partial t}$ volte: chè esso è

preso G volte nei solidi elastici. Invece di prendere $\frac{\partial}{\partial t}$ volte il risultato dell'operazione di LAPLACE, eseguita sulla componente dello spostamento elastico, possiamo eseguire l'operazione Δ_2 sulla derivata della componente dello spostamento rispetto al tempo. Ma la derivata di questa componente è la componente della velocità, e dunque i termini addizionali sono rispettivamente $\mu \Delta_2 u$, $\mu \Delta_2 v$, $\mu \Delta_2 w$; ove u , v , w sono le componenti della velocità. Ora, ricordata l'equivalenza — agli effetti dell'equilibrio — dei sistemi (1) e (2), inseriamo i termini ad esso individuati nelle equazioni (1), trascurando i termini nulli, ed avremo:

$$(3_x) \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \mu \Delta_2 u = 0$$

$$(3_y) \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \mu \Delta_2 v = 0$$

$$(3_z) \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \mu \Delta_2 w = 0.$$

Constatata l'identità di σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} con la pressione p invariabile su tutti i piani passanti per il punto generico, ed inteso per p il numero che misura l'intensità della pressione idrodinamica (compressione: segno negativo) moltiplicato per le dimen-

sioni della pressione, scendono le equazioni cardinali del moto dei fluidi viscosi, completate da quella dell'incompressibilità:

$$(3_x') \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta_x u$$

$$(3_y') \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta_y v$$

$$(3_z') \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta_z w$$

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Queste equazioni, che il creatore della teoria della lubrificazione — OSBORNE REYNOLDS — deduce dalla famosa memoria di GEORGE GABRIEL STOKES sull'attrito interno dei fluidi in moto, sono in sostanza le classiche equazioni del NAVIER, qui ottenute assai speditamente.

3. Posizione del problema e sua risoluzione.

Nel moto d'avvicinamento nella direzione z (fig. 1), di due lastre piane parallele, di larghezza costante $2a$, infinitamente estese nella direzione delle y (normalmente al foglio) approssi-

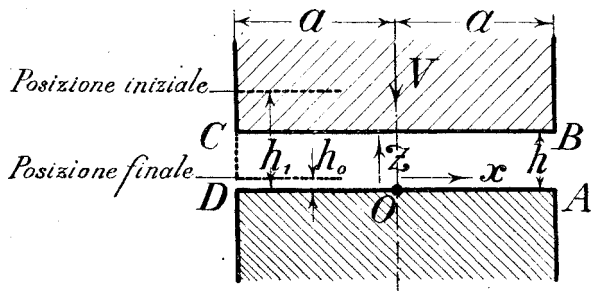


Fig 1

mantisi con velocità relativa V , il lubrificante sfugge dalle luci AB , CD in copia tale da eguagliare l'avvenuta diminuzione nel volume $ABCD$, entro l'unità di lunghezza presa lungo le y .

In questo moto la velocità generica u è funzione pura di x e di z ; la v è nulla; la w non può che essere piccolissima, trascurabile a fronte di u . Il sistema (3') si riduce dunque a:

$$(5) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta_x u = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

La condizione di continuità impone ad u di variare linearmente con x , e dunque $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; la direzione del flusso è sempre normale ad y , onde $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; la (5) si riduce a:

$$(6) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Il gradiente della pressione è indipendente da z , e la velocità u è nulla sia per $x=0$, che per $z=0$; onde si deve avere:

$$(7) \quad u = Kz + \frac{1}{2\mu} z^2 \frac{dp}{dx}.$$

Ma è pure $u=0$, per $z=h$, onde:

$$(8) \quad K = -\frac{h}{2\mu} \frac{dp}{dx}.$$

Dall'ultima e penultima scende:

$$(9) \quad u = -\frac{z}{2\mu} (h-z) \frac{dp}{dx}.$$

In (fig. 2) è tracciato l'andamento parabolico delle u in sei sezioni a piacere, ove $x = \text{cost.}$ Dopo ciascuna di queste sezioni

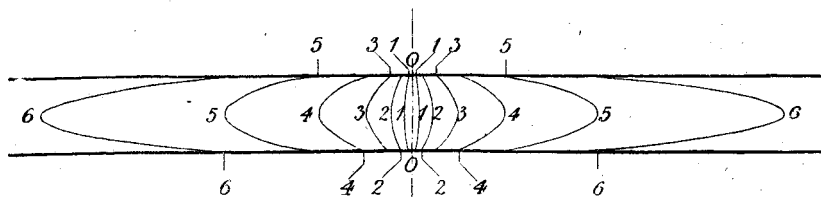


Fig. 2

la equazione di continuità leggesi:

$$(10) \quad V \cdot x = \int_0^h u dz = \frac{dp}{dx} \int_0^h -z(h-z) dz,$$

da cui:

$$(11) \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{12\mu Vx}{h^3}.$$

Integrando da $x=0$ ad $x=x$:

$$(12) \quad p_0 - p_x = \frac{6\mu Vx^2}{h^3}.$$

Diciamo Δp l'eccesso della pressione in O , fig. 1, su di quella delle luci $x = a$:

$$(13) \quad \Delta p = \frac{6a^2}{h^3} \mu V.$$

La quale dà modo di valutare gli effetti meccanici del dispositivo in esame.

(continua)

Castellanza, gennaio 1923.