UMI

Recensioni:

* W. Blaschke: Vorlesungen über Differential geometrie. 1. Elementare Differential geometrie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.1, p. 30–36.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_1_30_0>

RECENSIONI

W. BLASCHKE: *Vorlesungen über Differential geometrie.* 1. Elementare Differential geometrie, pagine X+230 (Berlin, Julius Springer 1921).

Il grandioso programma di F. KLEIN (Erlangen 1872) che dà una norma, in base alla nozione di gruppo di trasformazioni, per la classificazione delle ricerche geometriche trova piena attuazione nell' opera del BLASCHKE di cui è apparso il primo volume. Infatti a questo, dedicato alle proprietà « elementari », cioè invarianti per il gruppo dei movimenti, seguiranno altri due volumi, uno per le proprietà del gruppo affine e l' altro dei gruppi definiti dalle metriche di RIEMANN e di WEYL.

Il titolo di queste *Lezioni di Geometria differenziale* porta l' aggiunta: *e fondamenti geometrici della teoria della relatività secondo Einstein*; è spontaneo ravvicinare questo fatto all' ordinamento che F. KLEIN ha voluto dare alla raccolta dei suoi scritti raggruppando (nel primo volume delle sue opere) fra gli sviluppi connessi al programma di ERLANGEN gli ultimi suoi lavori sulla teoria della gravitazione e sui teoremi di conservazione.

Se si pensa all' importanza, non solo rappresentativa ma costruttiva che le geometrie non-euclidee hanno avuto per la relatività speciale e le metriche Riemanniane per quella generale appare subito l' opportunità di parlarne in un trattato moderno di Geometria differenziale: e per preparare la mente alla comprensione delle nuove vedute di filosofia naturale e per ravvivare l' entusiasmo verso le ricerche matematiche astratte: entusiasmo che trae origine da una « prestabilita armonia fra la Matematica e la Fisica », come ama esprimersi il KLEIN, per cui quelle, ad un certo momento, vengono ad assumere nuovo valore per la descrizione dei fenomeni fisici: esse preparano le forme di pensiero atte a dominare la realtà.

Ma di questo ci dirà il BLASCHKE nel suo terzo volume

***

Già nella rigida fedeltà alle idee di KLEIN per la distribuzione della materia v' è un distacco notevole fra questo trattato e gli altri di Geometria differenziale, nei quali, in genere, vengono mescolate le proprietà relative ai varî gruppi.

Ma per altre due ragioni il volume apparso acquista rilievo ed interesse ed una fisonomia tutta propria.

La prima è che il B., fatta una debita rassegna dei risultati classici della G. D. *in piccolo*, dà la sua preferenza ai problemi differenziali *in grande*, di gran lunga più difficili, adeguando i mezzi geometrici alle finezze critiche dell' Analisi moderna.

L' altra ragione è questa: che il libro è veramente *nuovo*; basta guardare le date di molte citazioni per convincersi che dieci anni fa, per fissare una data, non si sarebbe potuto scrivere; e questa osservazione ha particolare importanza per ciò che il libro ci mette al corrente dei più recenti risultati della scuola tedesca, risultati acquisiti in un periodo di relazioni scientifiche interrotte o difficili, dei quali quindi assai malagevole sarebbe prender cognizione diretta.

Molti di essi sono frutto della vivace cooperazione scientifica di un gruppo di giovani raccolti intorno al BLASCHKE: ed il volume ne rispecchia il fresco entusiasmo e la modernità di vedute.

Nell' analisi che segue mi limiterò a segnalare quelle parti del nuovo trattato che lo distinguono dagli altri congeneri.

***

Del primo capitolo (*Kurventheorie*) non segnalerò che due punti: la trattazione delle curve isotrope, per soddisfare alle esigenze critiche di STUDY (con l' introduzione del parametro naturale di STUDY-VESSIOT) e l' apparire di una prima proposizione di geometria « integrale » o « in grande » relativa al minimo numero (4) di vertici di un' ovale piana, secondo una nuova dimostrazione comunicata all' A. da HERGLOTZ.

Col secondo capitolo (*Extreme bei Kurven*) si entra nel campo del calcolo delle variazioni; ne sono oggetto: il problema di RADON (le curve sghembe estremali di $\int \varphi ds$ ove φ è una funzione assegnata della curvatura si ottengono con quadrature); il classico problema isoperimetrico del cerchio trattato prima, indipendentemente dalla questione d' esistenza del minimo, per le curve chiuse a curvatura continua, poi, seguendo FROBENIUS (1915), per le ovali (¹), infine per curve rettificabili secondo la dimostrazione di HURWITZ; le interessanti disuguaglianze di SCHWARZ che conducono al teorema: le lunghezze degli archi di curve piane o sghembe, di curvatura 1, che congiungono due punti (non diametrali) di un cerchio unitario sono tutte o non inferiori al maggiore o non superiori al minore dei due archi contermini del cerchio unitario; il risultato vale per curve la cui immagine sferica delle tangenti sia rettificabile.

Il terzo capitolo (*Anfangsgründe der Flächentheorie*) raccoglie i risultati essenziali della geometria delle tre forme fondamentali di una superficie.

Nel quarto (*Geometrie auf einer Fläche*) introdotta la curvatura geodetica di una curva sulla superficie (con la variazione dell'arco) e rilevatone il significato spaziale (BELTRAMI) l' A. espone l'elegante procedimento di RADON col quale la dimostrazione del teorema di SCHWARZ citato e di altri analoghi relativi a curve sghembe si riduce al problema isoperimetrico piano.

Le geodetiche sono definite annullando la variazione dell'arco: la proprietà di minimo è stabilita nell'ipotesi che l'arco sia compreso in un « campo geodetico » (secondo l'espressione di WEIERSTRASS) senza indagarne per ora l'estensione.

Ritrovate le solite interpretazioni della curvatura gaussiana a partire da un cerchietto geodetico descritto intorno ad un punto, l' A. si occupa delle due famiglie di cerchi geodetici (curve di equidistanza geodetica da un punto; curve a curvatura geodetica costante); se le due famiglie coincidono la superficie ha curvatura gauss. costante K; ma di più, ed è questo un bel teorema intravisto dal DARBOUX e dimostrato di recente dal BAULE (1921), basta che le curve della seconda famiglia siano chiuse per avere K costante: il tipo della dimostrazione fa anzi sospettare che occorra anche meno! Trova qui opportunamente posto una breve trattazione delle superficie a curvatura costante, e in particolare la rappresentazione di quelle a curv. cost. negativa e dei loro movimenti sul semipiano di POINCARÉ.

Figura anche in questo capitolo la relazione di Gauss-Bonnet

(¹) La solita disuguaglianza fra il perimetro L e l'area F di una curva chiusa, $L^2 - 4\pi F \geq 0$, è stata di recente (1921) sostituita da un'altra più espressiva del BONNESEN. Se R è il raggio del minimo cerchio in cui può esser inclusa la curva ed r il più grande raggio dei cerchi in essa inclusi si ha $L^2 - 4\pi F \geq \pi^2(R - r)^2$; l'uguaglianza vale solo per il cerchio. Analoga disuguaglianza vale per i corpi convessi.

fra l'integrale della curvatura geodetica di una curva limitante sulla superficie un'area semplicemente connessa e la « curvatura integra » di questa (da cui il significato topologico della curvatura integra per una superficie chiusa): relazione d'interesse fondamentale per il suo carattere integrale e che perciò domina la geometria « in grande » sulla superficie.

Il capitolo quinto (*Fragen der Flächentheorie im Grossen*) si apre con le proprietà caratteristiche della sfera di esser l'unica superficie chiusa (priva di singolarità) a curvatura costante positiva e l'unica superficie ovale a curvatura media costante, quindi indeformabile se non si buca: teorema previsto da MINDING, la cui dimostrazione si è venuta perfezionando attraverso lavori di MINKOWSKI, HILBERT e LIEBMANN (l'ultimo è del 1919). Questi ha pure dimostrato la rigidità delle superficie ovali, oggetto anche di più recenti ricerche del BLASCHKE (1921) e del WEYL (1917) il quale ultimo ha pur dimostrato che ad un elemento lineare a curvatura positiva corrisponde una sola superficie ovale (nel gruppo dei movimenti). Affine a questi è il risultato di CHRISTOFFEL sulle superficie chiuse, rappresentabili biunivocamente sulla sfera al modo di Gauss, secondo il quale nota la somma dei raggi principali di curvatura la superficie è individuata a meno di trasformazioni parallele: la dimostrazione impiega la « Stützfunktion » di MINKOWSKI e le funzioni sferiche.

Contrapposto, in certo senso, ai teoremi sulla sfera e sulle ovali è quello notevolissimo di HILBERT sulla inesistenza di superficie a curvatura costante negativa ovunque regolari (cioè dotate di piano tangente variabile con continuità; l'analiticità non è necessaria) al finito: la dimostrazione riportata, di HOLMGREN (1902) evita lo studio del comportamento delle asintotiche (inesistenza di asintotiche con punto doppio o chiuse) e il calcolo dell'area della superficie.

I paragrafi successivi del capitolo sono dedicati allo studio delle geodetiche in grande. Il risultato di POINCARÉ, sull'esistenza di geodetiche chiuse sulle superficie ovali, è accompagnato da un'osservazione di HERGLOTZ per la quale, posta l'esistenza di una geodetica chiusa, se ne ricava con un semplice procedimento-geometrico l'esistenza di altre due (in condizioni di validità tuttavia non ben precisate): sono semplicemente citati i risultati di BIRKHOFF (1917), ma non quelli pure interessantissimi di DARBOUX (costruzione di superficie rotonde con sole geodetiche chiuse), di ZOLL e di FUNK (1914) (mi piace ricordare che ZOLL ha trovato una superficie rotonda piriforme, *senza singolarità*, di cui tutte le geodetiche sono chiuse), e la proprietà caratteristica della sfera di esser l'unica superficie, priva di singolarità, con tutte le curve a curvatura geodetica costante chiuse; mentre non esistono fasci di geodetiche chiuse sulle superficie a curvatura ovunque negativa, pur esistendo sempre su queste tali curve (HADAMARD)).

Per determinare l'estensione del campo geodetico intorno ad un punto, è fondamentale la condizione di JACOBI: se sopra una geodetica uscente da P è P' il punto più prossimo (in un dato verso) a P in cui essa è incontrata da una geodetica infinitamente vicina (P' dicesi coniugato di P) non può valere la proprietà di minimo dell'arco geodetico oltre P'. L'elegante dimostrazione geometrica di DARBOUX, che fa uso della relazione fra gli archi di due geodetiche uscenti da P e l'arco da essi determinato sulla linea inviluppo (luogo dei punti P'), cessa di valere quando quella linea inviluppo abbia in P' una cuspide: mentre la condizione di JACOBI rimane valida. La dimostrazione qui riportata è dovuta a BLISS (1915) che utilizza, per lo studio della variazione seconda dell'arco, la condizione di ERDMANN sulle soluzioni discontinue nel calcolo delle variazioni.

Segue il teorema di BONNET che assegna il limite superiore πA per la lunghezza del diametro (massima distanza di due punti) di una superficie ovale a curvatura ovunque $\geq 1/A^2$, completato dall'A. con la dimostrazione dell'esistenza di un cammino minimo congiungente due punti qualsiansi e dell'appartenenza di questo ad una geodetica: ma il BLASCHKE aveva già dato (1916) una disuguaglianza assai più espressiva in cui figura il raggio di una sfera tutta contenuta nella superficie ovale.

Ancora due paragrafi sono dedicati alle geodetiche: uno alla ricerca delle superficie per le quali la distanza di due punti coniugati è costante, problema equivalente all'altro di cercare le superficie per le quali ogni punto ha un sol punto coniugato (di esse si sa che tutte le geodetiche sono chiuse ed hanno la stessa lunghezza, che la corrispondenza stabilita da punti coniugati è isometrica per la superficie e che questa ha la connessione della sfera: ma non si può ancora dire se sia una sfera); l'altro alla dimostrazione di un bel teorema di CARATHÉODORY che assegna almeno 4 cuspidi alla curva luogo dei punti coniugati di un punto di una superficie ovale.

Nel 6° cap. (*Extreme bei Flächen*) la variazione della superficie per il passaggio ad una parallela porta subito alla curvatura media e alle solite questioni sulle superficie d'area minima: notevole il gruppo di formole ottenuto da STUDY con l'introduzione dei parametri naturali delle curve isotrope della superficie e la relazione di CARLEMAN (1921) fra la lunghezza L di una curva chiusa sghemba e l'area F di una superficie d'area minima per essa, $L^2 \geq 4\pi F$, in cui il segno d'uguaglianza vale solo per il cerchio, e che estende l'analoga proprietà per il piano.

Ma la vera e classica estensione di questa allo spazio è la proprietà di minimo della sfera. Le geniali dimostrazioni geometriche di STEINER, il cui deficiente rigore è largamente distanziato dal grande valore euristico, hanno ceduto il posto, sotto la sferza di una critica raffinata, a quelle più complete di SCHWARZ, di MINKOWSKI, di O. MÜLLER, di L. TONELLI.

La questione più delicata, che non è affrontata da STEINER, è quella di dimostrare l'esistenza del minimo, e anche, seguendo il procedimento di simmetrizzazione di STEINER, di provare che questo conduce ad una superficie avente area minore (e non eventualmente uguale) a quella della superficie di partenza (quando naturalmente il piano che serve a simmetrizzarla non sia già piano di simmetria, o ad esso parallelo, per la superficie data).

Restando alla prima questione la difficoltà di risolverla è connessa alla scelta della classe di superficie entro la quale si vuol dimostrare la proprietà di minimo della sfera (e anche ai mezzi di cui si vuol far uso). E ciò spiega la varietà delle ricerche a cui questo problema ha dato luogo.

La dimostrazione di SCHWARZ si riferisce (nel caso più generale) a superficie composte di un numero finito di pezzi aventi in ogni punto piano tangente variabile con continuità; quella di MINKOWSKI alle superficie convesse, classe di superficie in un certo senso assai più ristretta della precedente, ma per la quale non occorre la considerazione dei piani tangenti (ma solo dei piani limitanti « Stützebene » la cui esistenza è assicurata dalle condizioni di convessità); quella di L. TONELLI (1915), la più generale ed esente da ogni obbiezione critica, è valida per qualsiasi superficie racchiudente anche infiniti spazî connessi o no fra di loro, situata tutta al finito o estendendosi pure all'infinito.

Il BLASCHKE si è pure occupato di questo problema: in un suo interessantissimo volumetto *Kreis und Kugel* (1916) ha dato un procedimento per portare a termine con tutto rigore, ed in modo elementare, la dimostrazione di STEINER nel caso di corpi convessi: esso consiste nel provare che la simmetrizzazione (anche nel passaggio al limite da una superficie poliedrica approssimante alla superficie limitante il corpo convesso) diminuisce l'area, e che si può così costruire una successione minimizzante avente per limite la sfera di ugual volune la quale dà effettivamente il minimo dell'area: e ciò senza uscire da quei confini, nettamente posti dal TONELLI (1913), oltre i quali questo tipo di ragionamento perde valore; serve allo scopo un teorema di selezione « Auswahlsatz » che afferma la possibilità di scegliere in un insieme infinito limitato di corpi convessi (cioè tutti racchiudibili p. es. entro una sfera) una successione convergente ad un corpo convesso.

Nel libro attuale il B., pur limitandosi alle superficie ovali, ha sostituito alla propria una dimostrazione più elementare di W. GROSS (1917), che del resto non esige quella limitazione.

Di carattere notevolmente diverso dai precedenti è l'ultimo capitolo (Liniengeometrie): in esso, principalmente per mezzo delle rappresentazioni di STUDY delle rette (reali) orientate sui punti duali di una sfera (e anche di altre più recenti proposte dal GRÜNWALD e dal BLASCHKE), sono presentati in forma compatta i risultati più notevoli della geometria della retta (sistemi ∞^1 e ∞^2) e i suoi intimi legami con la teoria delle superficie e delle funzioni analitiche. Il principio di trasporto di STUDY applicato alla lunghezza d'una linea e alla relazione integrale di GAUSS-BONNET dà senza difficoltà invarianti e relazioni integrali per i sistemi ∞^1 e ∞^2 di rette.

* * *

L'impressione d'insieme di questo I vol. della *Geometria differenziale* del BLASCHKE è eccellente. È un libro pieno di fermenti d'idee nuove: l'esposizione è rapida e brillante per lo stile. Risultati classici, di cui non si può tacere senza essere incompleti, o anche nuovi, ma non essenziali ai fini dell'opera sono raccolti in appositi paragrafi (Aufgaben und Lehrsätze): citazioni dei lavori originali o di trattati risparmiano di riprodurne le dimostrazioni, conservando così al volume una linea di sviluppo svelta e ben definita.

I suoi pregi ci fanno vivamente desiderare la sollecita pubblicazione degli altri due volumi: ai quali la maggiore novità della materia da trattare non può che aggiungere originalità e motivo di più intenso interesse. *e. b.*