UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: G. Julia, L. Antoine, W. Sierpinski

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.1, p. 24–29.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_1_24_0>

SUNTI DI LAVORI ESTERI

Iterazione analitica. — G. JULIA: *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles.* (Grand prix des sciences mathématiques, 1918) ([1]).

Questa memoria, composta nel 1917, è stata stampata nel *Journal de mathématiques pures et appliquées* nella forma stessa sotto cui era stata consegnata all'Istituto di Francia il 24 dicembre 1917; l'A. vi ha aggiunto solo una breve nota addizionale (n. 118) per rettificare un errore in un particolare senza importanza.

La memoria si inizia con *Preliminari* in cui si ricordano quelle cognizioni sulla teoria delle funzioni che sono indispensabili per ciò che segue, in modo che la Memoria possa bastare a se stessa. Ciò che vi è di originale da parte dell'A. consiste in un'estensione del lemma classico di SCHWARZ, che, sviluppato ulteriormente dall'A. in un articolo degli *Acta Math.* (T. 42), ha dato luogo ad interessanti lavori di R. NEVAULINNE.

Parte I. *Studio generale dell'iterazione di una sostituzione razionale* $z_1 = \varphi(z)$. - Insieme dei punti singolari dell'iterazione. Si chiama E l'insieme numerabile delle radici primitive di tutte le equazioni $z = \varphi_n(z) (n = 1, 2, ... \infty)$ per le quali è $|\varphi'(z)| > 1$, punti che si dicono anche punti doppi o cicli repulsivi. Teorema fondamentale: se si circonda un punto z di E di un'area D arbitrariamente piccola, e si prendono le iterate successive D_i di D, da un indice in poi le D_i ricoprono tutto il piano, all'infuori del caso in cui $z = \varphi(z)$ si riconduce ad un polinomio in z, oppure

([1]) Secondo la promessa fatta nel n. 1 del *Bollettino* (pag. 20) rendiamo conto del lavoro importante di G. JULIA sull'iterazione delle funzioni razionali, e siamo lieti di poterlo fare mediante un riassunto favoritoci dall'Autore stesso, al quale la Redazione del *Bollettino dell' U. M. I.* rende vive grazie.

$z_1 = z^{\pm k}$, nei quali casi uno o due punti eccezionali rimangono esterni a tutti i D_i.

Nessun punto di E è isolato in E. L'insieme derivato E' di E è *perfetto*. Ogni punto di E' è limite per gli antecedenti di un punto qualunque del piano, tranne gli eccezionali. In nessun punto di E' una famiglia formata da iterate di $\varphi_n(z)$ può essere normale. La struttura di E' è la stessa in tutte le sue parti, poichè E' può essere generato da un numero finito di iterazioni a partire da una qualunque delle sue parti. Può essere *dovunque discontinuo* (es. $z_1 = 2z^k + 1$), o un *continuo lineare* (funzioni razionali a cerchio fondamentale), o *comprendere tutto il piano* $\left(\text{es. } z_1 = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}\right)$. Se esiste un punto $z = \varphi_p(z)$ dove è $|\varphi'_p(z)| < 1$, E' non è mai superficiale. In generale, E' divide il piano in porzioni tali che in ognuna di esse le funzioni limiti delle $\varphi_n(z)$ sono analitiche; E' è l'insieme dei punti singolari di queste funzioni limiti; esso delimita le regioni di convergenza delle successioni infinite estratte dalla successione delle $\varphi_n(z)$ ed in ognuna di esse i caratteri di convergenza sono i medesimi.

Parte II. *Studio della convergenza verso un punto attrattivo o un ciclo attrattivo.* - Un punto $\zeta = \varphi(z)$, in cui è $|\varphi'(\zeta)| < 1$, è detto punto doppio attrattivo; esso appartiene ad un dominio R, limitato da E', in cui $\varphi_n(z)$ converge uniformemente a ζ: è il *dominio immediato* di z. Esso contiene sempre almeno nn punto critico di $\varphi_{-1}(z)$, funzione inversa di $\varphi(z)$. Ciò si estende alle radici delle $\zeta = \varphi_p(\zeta)$ per $|\varphi'_p(\zeta)| < 1$ e ai cicli attrattivi $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{p-1})$ che esse generano. Il numero di questi cicli è dunque limitato per qualsiasi funzione. Seguono esempi: $z_1 = 2z^k + 1$, $z = \frac{z + z^2}{2}$,

$z_1 = \frac{az^k + b}{cz^k + d}$ aventi due punti doppi attrattivi, ed altri più generali (frazioni a cerchio fondamentale). Il *dominio totale* di convergenza verso un punto doppio attrattivo ζ si compone di R e di tutti i suoi antecedenti; se non si confonde con R (e per ciò occorre che R contenga un numero di punti critici abbastanza alto) esso si compone di *un numero infinito di regioni distinte.* Ciò accade sicuramente quando il numero dei punti o dei cicli attrattivi è > 2, ed uno al più fra questi punti può avere un dominio totale coincidente con R. In quanto alla *connessione*, o R è semplicemente connesso, o di ordine di connessione infinito. Se uno dei punti attrattivi ha un dominio totale coincidente col suo dominio immediato, il dominio immediato di ogni altro è semplicemente connesso.

Esempi. a) $z_1 = \frac{-z^3 + 3z}{2}$; E' è una curva di JORDAN che divide il piano in un numero infinito di regioni; questa curva ha punti doppi dovunque densi su di essa. Ciò si può rappresentare mediante una costruzione geometrica ispirata dagli esempi noti di HELGE von KOCH, modificati convenientemente. Vi sono i tre punti doppi ∞, -1, $+1$; il dominio di ∞ è, solo, ad un tempo totale ed immediato, e perciò semplicemente connesso.

b) Esempi tratti dalla regola di NEWTON per l'equazione algebrica $f(z) = 0$; cioè

$$z_1 = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

con $f(z)$ di secondo o di terzo grado.

c) Esempio in cui il dominio immediato di un punto doppio attrattivo è limitato da *un' infinità di curve distinte,* a due a due esterne:

$$z_1 = A\left(\frac{z^5}{5} - \frac{2az^4}{4} + \frac{a^2z^3}{3}\right)$$

con A reale, positivo ed abbastanza grande.

d) $z_1 = z^2 - z$, E' è qui il segmento $(-2, +2)$; il resto del piano è il dominio di convergenza all'infinito.

Parte III. *Sulla natura dei continui lineari che limitano i varî dominî di convergenza.* - Studio dell'esempio $z_1 = \frac{z + z^2}{2}$. Il continuo separatore *E' è una curva di Jordan semplice chiusa*; su questa i punti di E sono ovunque densi ed in questi E' non ha tangente. Si dà una generazione del dominio R dell'origine che riavvicina E' alla curva priva di cerchio osculatore data da POINCARÉ nella sua memoria sui gruppi kleiniani. Le circostanze di questo esempio si riproducono in casi assai generali, ottenuti, ad esempio, partendo da frazioni a cerchio fondamentale quando se ne fanno variare i coefficienti entro limiti sufficientemente ristretti; si hanno ancora curve di JORDAN semplici chiuse. Per $z_1 = \frac{-z^3 + 3z}{2}$, il continuo E' è ancora una curva di JORDAN chiusa, ma non più semplice perchè essa ha punti doppi densi su ogni arco della curva.

Parte IV. *Studio delle convergenze singolari.* - Questo è il caso dei punti ζ in cui è $\varphi'(z) = e^{\frac{2\pi i p}{q}}$ (p, q interi), o dei cicli $\xi = \varphi_p(\zeta)$, $\varphi_p'(\zeta) = e^{\frac{2\pi i p}{q}}$. Questi punti *appartengono all'insieme perfetto E'*. Ad esempio, se $\varphi'(\zeta) = 1$, esiste un dominio R limitato da E', avente ζ sul suo contorno e tale che in R le $\varphi_n(z)$ convergono uniformemente a ζ. Questo è il dominio immediato di ζ, esso contiene almeno un punto critico di $\varphi_{-1}(z)$, onde si conclude che il numero di tali punti ζ è limitato. Qui giova grandemente l'estensione del lemma di SCHWARZ data nei ***Preliminari***. La forma di R intorno a ζ dipende dallo sviluppo di $\varphi(z)$ intorno a quel punto: se è $\varphi''(\zeta) \neq 0$, la forma è, all'ingrosso, quella di una cardioide con cuspide a tangente determinata; se è $\varphi''(\zeta) = ... = \varphi^{(p-1)}(\zeta) = 0$, $\varphi^{(p)}(\zeta) \neq 0$, R ha $p - 1$ punte rientranti in ζ, con tangenti determinate regolarmente disposte. Esempi: $z_1 = z + z^2$, $z_1 = z + z^3$.

Terminano la Memoria alcune riflessioni sui punti $\zeta = \varphi(\zeta)$ con $\varphi'(\zeta) = e^{2\pi i\alpha}$, α irrazionale. Si dimostra, senza risolvere il dilemma, che un tale punto o 1°) appartiene ad E' ed è allora limite per i conseguenti di almeno un punto critico di $\varphi_{-1}(z)$, o 2°) non appartiene ad E', ed è allora un centro circondato da curve chiuse analitiche, invarianti per $z_1 = \varphi(z)$. *(dall'A.)*.

Topologia. — L. ANTOINE: *Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages* (Thèse, Université de Strasbourg, 1922).

Date due figure omeomorfe [1] nel medesimo spazio, si possono dare tre casi:

1.° La loro corrispondenza può estendersi a tutto lo spazio.
2.° Può estendersi solo alla loro vicinanza.
3.° Non può estendersi ad alcuna vicinanza.

L'A. studia, a questo punto di vista, alcune figure semplici. Il lavoro è così diviso:

Parte I. *Curve di Jordan senza punti multipli.* — Cap. I. Se le curve sono piane, la loro corrispondenza si estende a tutto il piano. — Capo II. Nello spazio a tre dimensioni, i tre casi possono effettivamente presentarsi. Esempio del terzo caso, dedotto da curve tracciate su di un toro.

Parte II. *Aggregati perfetti discontinui.* — Cap. I. Studio generale di questi aggregati, definibili come insieme di punti interni ad un'infinità di superficie scelte convenientemente. Per un tale insieme si può fare passare un arco di JORDAN. Due aggregati perfetti discontinui sono omeomorfi. — Cap. II. La corrispondenza fra due aggregati piani si estende a tutto il piano. — Cap. III. Nello spazio a tre dimensioni, si presentano i tre casi. Esempi dei casi 2° e 3° (per gli aggregati e per le curve) dedotti da un aggregato P tale che nessuna superficie semplicemente connessa possa dividere P in due parti senza intersecarlo. *(dall'A.)*.

(1) Biunivocamente corrispondenti nel senso dell'*Analysis situs*.

Calcolo funzionale. — W. SIERPINSKI. *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, « Fundamenta Matematicae », tom. I, 1920, pp. 116-122.

S. BANACH. *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Ibid. pp. 123-124.

L'equazione funzionale

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

a cui si riconnettono le questioni critiche sui fondamenti della geometria proiettiva e sulla composizione dei vettori, ha dato luogo, come è noto, a molti lavori. Limitandoci soltanto ai risultati essenziali, rammenteremo che CAUCHY (*Analyse Algébrique*, 1821, pag. 104) dimostrò che la (1) ammette un' unica soluzione continua, per x reale, e cioè la $f(x) = kx$, k essendo una costante arbitraria. Assai più tardi, DARBOUX (*Math. Annalen*, Bd. XVII, 1880, pag. 55) aggiunse che, se una soluzione della (1) è definita per ogni x reale, ed esiste un intervallo (a, b), qualsiasi, in cui essa si mantiene reale e limitata, tale soluzione non differisce da kx.

LEBESGUE (*Sur les transformations ponctuelles etc.* Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XLII, 1906-07) dimostrò poi che non esiste nessuna funzione reale di variabile reale, *esprimibile analiticamente*, che sia soluzione della (1) e non identica a kx; e FRÉCHET (*L' Enseignement Mathématique*, t. XV, 1913, pag. 390), infine, provò che se $f(x)$ è soluzione della (1), ed è funzione reale della variabile reale x, sempre misurabile per tutti gli x indicati, è $f(x) = kx$.

Il ragionamento del FRÉCHET utilizza il postulato di ZERMELO, e perciò il SIERPINSKI ed il BANACH dimostrano, ognuno per proprio conto, la proposizione del FRÉCHET, liberandola completamente dal postulato indicato.

La dimostrazione del SIERPINSKI si fonda sul seguente lemma, che è per sè stesso interessante: « Se P e Q sono due insiemi lineari, di misura positiva, esistono due punti, uno p di P ed uno q di Q, tali che la distanza fra p e q sia razionale ». E da questo lemma deduce direttamente la conclusione $f(x) = kx$.

Il BANACH, invece, si riconduce al risultato di CAUCHY, provando che la soluzione indicata è continua; il che ottiene in modo veramente semplice ed elegante, applicando il seguente teorema di LUSIN: « Se nell' intervallo (a, b) la funzione $f(x)$ è misurabile, si ha per ogni $\varepsilon > 0$, almeno un insieme E di (a, b), di misura $m(E) > (b-a) - \varepsilon$, e tale che su di esso la $f(x)$ sia continua ».

Resta così provato che ogni soluzione della (1), reale della variabile reale x, che non sia la kx, non è misurabile, e, in particolare, che non è misurabile la soluzione indicata da G. HAMEL (*Math. Annalen*, Bd. LX, 1905, pag. 459).

Osserviamo che, fino ad ora, non si conosce nessuna soluzione della (1), diversa dalla kx, la quale sia costruita indipendentemente dal postulato di ZERMELO; e che è molto probabile che una tale soluzione non sia effettivamente costruibile.

Aggiungiamo, infine, che, recentemente, il MINETTI (*Sull'equazione funzionale* $f(x+y)=f(x)f(y)$, Rend. R. Accad. dei Lincei vol. XXXI, 1922) ha dimostrato che il risultato di DARBOUX può ottenersi anche se la $f(x)$ si suppone definita soltanto sull'intervallo (a, b); e che, per considerazioni analoghe a quelle del MINETTI, accoppiate al ragionamento del BANACH, altrettanto può dirsi del risultato del FRÉCHET. *l. t.*

Funzioni. — W. SIERPINSKI. *Sur les fonctions convexes mesurables.* « Fund. Math. », t. I, 1920, pp. 124-129.

Una funzione $f(x)$, reale della variabile reale x, è detta *convessa*, in un intervallo (a, b), se, per ogni coppia x_1 e x_2 di valori della x, appartenenti ad (a, b), vale la disuguaglianza

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq f(x_1)+f(x_2).$$

JENSEN (*Sur les fonctions convexes etc.* « Acta Mathematica », t. XXX, 1905-1906, pp. 175-193) dimostrò che « una funzione convessa in (a, b) e limitata superiormente su questo intervallo, è continua in ogni punto interno ad (a, b) ». SIERPINSKI dà una nuova e semplice dimostrazione di questa proposizione, e prova che essa vale anche se la condizione che la funzione sia superiormente limitata si sostituisce con quella che la *funzione sia misurabile.*

Il SIERPINSKI ottiene così una nuova dimostrazione del teorema del FRÉCHET, che cioè ogni funzione misurabile, la quale soddisfa all'equazione funzionale $f(x+y)=f(x)+f(x)$, è continua.

l. t.