Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Eugenio Bertini

Dimostrazione di un teorema relativo alla quartica gobba di 2^a specie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (1923), n.1, p. 1–2.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1923_1_2_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1923.

PICCOLE NOTE

Dimostrazione di un teorema relativo alla quartica gobba di 2.ª specie.

Nota di EUGENIO BERTINI

Il teorema è il seguente: *L'inviluppo di un piano che taglia una quartica gobba di 2.ª specie, C_4, in quattro punti armonici è la superficie di* STEINER.

CREMONA (*Opere*, tomo I, pag. 298) si limita ad osservare che l'inviluppo è di 3.ª classe, in base alla considerazione che per ogni trisecante della C_4 passano tre piani dell'inviluppo, considerazione che non sembra rigorosa per essere le trisecanti una semplice infinità. Nel mio libro *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* (n.° 22, Cap. 16 della 2.ª edizione, che uscirà prossimamente, pubblicata dalla casa editrice Principato di Messina), la dimostrazione si fa ricorrendo alla curva razionale normale dello spazio a quattro dimensioni, della quale la C_4 è proiezione. Qui si dimostra il teorema, restando nello spazio ordinario.

Per ottenere la classe dell'inviluppo basterà vedere quanti piani di esso passano per una corda AB generica di C_4 (essendo A, B i punti di appoggio). Un piano per AB sarà dell'inviluppo se, detti C, D gli ulteriori suoi punti d'intersezione con C_4, si abbia il birapporto $(ABCD) = 1$, ovvero $= 2$, ovvero $= \frac{1}{2}$. Osservando che il piano variabile intorno ad AB segna su C_4 una involuzione di 2.° ordine, si avrà nel 1.° caso una soluzione data dalla coppia CD comune a questa involuzione e all'altra involuzione di 2.° ordine che ha in A, B punti doppî; nel 2.° caso vi saranno due soluzioni date dalle coppie CD comuni alla prima involuzione e alla proiettività avente A, B per punti uniti e per invariante 2, e nel 3.° caso pure due soluzioni per ragione analoga, queste però coincidenti con quelle, perchè, se $(ABCD) = 2$, si ha $(BACD) = \frac{1}{2}$. Per una corda passano quindi tre dei considerati piani e però la superficie è di 3.ª classe.

Ora si consideri il tetraedro dei quattro piani stazionari di C_4. Un piano variabile intorno ad uno spigolo di questo tetraedro segna sulla C_4 una involuzione di 4.° ordine ciclico-proiettiva, perchè per esso passano due piani aventi incontro quadripunto colla curva. Ma in un gruppo ciclico-proiettivo di quattro punti, il primo e il terzo sono coniugati armonici rispetto al secondo e al quarto: dunque i piani dei fasci che hanno per assi gli spigoli del detto tetraedro sono piani dell'inviluppo e per conseguenza ogni faccia del tetraedro è piano doppio dell'inviluppo. Questo è quindi di 3.ª classe con 4 piani doppî e però correlativo alla superficie di 3.° ordine con 4 punti doppî: si ha cioè una superficie di STEINER.

Pisa, gennaio 1923.