UMI

Corrispondenza

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.2-3, p. 93–95.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_2-3_93_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1922.

CORRISPONDENZA

4. È noto che dalle cosidette relazioni di monogeneità

$$u_x' = v_y', \quad u_y' = -v_x', \tag{1}$$

segue che le u, v posseggono tutte le derivate. Ciò si dimostra (con ipotesi assai late sulle u, v e loro derivate) mediante la formula di CAUCHY, classica nella teoria delle funzioni di variabile complessa. Ora questa formola ricorre a integrali: e, appena si pensi che un integrale si può considerare come limite di una somma, è evidente che tale procedimento è applicabile soltanto perchè le (1) formano un sistema *lineare* di equazioni. Ora, sia per l'importanza del teorema in discorso, sia per lo studio di altri casi analoghi, che si possono presentare in altre ricerche, mi pare desiderabile il possedere una dimostrazione ***diretta*** del teorema citato, che non ponga a base della trattazione la linearità delle (1), e che sia applicabile p. es. alle:

$$\frac{u_x'}{\sqrt{1 + u_x'^2 + u_y'^2}} = v_y', \quad \frac{u_y'}{\sqrt{1 + u_x'^2 + u_y'^2}} = -v_x',$$

di cui è evidente il legame con la teoria delle superficie ad area minima [1]. *g. f.*

5. Un gruppo finito discontinuo ha tra i suoi caratteri un intero, che non mi sembra finora osservato: il numero *minimo* N di sottogruppi ciclici, tra cui si possono distribuire le sue operazioni. ***Questo numero* N *vale naturalmente* 1 *per i gruppi ciclici. Non vi è nessun gruppo, per cui*** $\mathrm{N} = 2$. Se infatti le operazioni

[1] In questo ordine di ricerche, che dall'esistenza di alcune derivate vogliono dedurre l'esistenza di altre, cfr. la Nota: FUBINI, *Derivate successive di una funzione di più variabili.* R[illegible]lla R. Accad. dei Lincei, 1913, vol. 21, ser. 5ª, 2° sem., pag. 595.

(anche non tutte distinte)

$$(\alpha) \qquad 1 = A^0,\ A,\ A^2,\ A^3, \ldots,\ A^{n-1}$$
$$(\beta) \qquad 1 = B^0,\ B,\ B^2,\ B^3, \ldots,\ B^{m-1} \qquad (\text{con } A^n = B^m = 1)$$

esaurissero le operazioni del gruppo, allora anche $A^{-1}B$ sarebbe un'operazione del gruppo, cioè del tipo A^r oppure B^s. Nel primo caso B sarebbe una potenza di A, nel secondo A una potenza di B. Perciò uno dei sottogruppi (α), (β) sarebbe contenuto nell'altro. E quindi $N = 1$. Se invece $N = 3$, e i sottogruppi (α), (β) e

$$(\gamma) \qquad 1 = C^0,\ C,\ C^2, \ldots,\ C^{p-1} \qquad (C^p = 1)$$

esauriscono le operazioni del gruppo, allora, come sopra, si vede che AB e $B^{-1}A$ non possono essere nè potenza di A, nè potenza di B, e quindi sono potenza di C. Perciò A^2 è potenza di C. Permutando A, B, C, se ne deduce facilmente che i tre sottogruppi clici generati da A^2, o da B^2, o da C^2 coincidono. Sia

$$1 = \Gamma^0,\ \Gamma, \ldots,\ \Gamma^{a-1} \qquad (\Gamma^a = 1)$$

tale sottogruppo. Allora le potenze *pari*, e non quelle *dispari* di A, B, C sono anche potenze di Γ e viceversa. Così AB non può essere potenza di Γ, perchè altrimenti AB sarebbe anche potenza di B; quindi A sarebbe potenza di B, e infine (α) sarebbe contenuto in β. Sarà dunque AB una potenza di C, cioè sarà $AB = \Gamma^r C^{-1}$, cioè $ABC = \Gamma^r$. Viceversa si vede subito che (α), (β), (γ) generano un gruppo con $N = 3$, se A, B, C ed ABC sono potenze di una stessa operazione Γ, e se nessuno degli α, β, γ è contenuto in un altro (in tal caso $n = m = p = 2a$). In altre parole (posto $\Gamma = 1$) *ognuno dei nostri gruppi è meriedricamente isomorfo col gruppo generato da tre operazioni* A, B, C *legate dalla* $A^2 = B^2 = C^2 = ABC = 1$.

Questo teorema si estende con analisi più laboriosa al caso $N = 4$. Si domanda se è possibile assegnare qualche proprietà generale del numero N, che lo colleghi ad altre proprietà dei gruppi finiti discontinui. *g. f.*

6. Segnaliamo all'attenzione dei lettori del *Bollettino* la seguente interessante questione pubblicata nell'ultimo fascicolo dell'*American Math. Monthly*.

« Si chiede una soluzione dell'equazione funzionale

$$f(x^2) - [f(x)]^2 = 2x.$$

7. Sarebbe desiderato che qualche corrispondente inviasse una piccola Nota contenente l'elenco dei varî modi in cui si è presentato fino ad ora il concetto di *distanza* fra due funzioni (fra due punti dello spazio funzionale) ed un confronto critico delle varie definizioni proposte. *u.*

8. Dato un insieme A, limitato e chiuso, di punti del piano (x, y) e definita in esso una funzione $\varphi(x, y)$, continua insieme con la sua derivata parziale $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, è possibile di definire in tutto il piano (o in un quadrato comprendente, nel suo interno, A) una funzione $\Phi(x, y)$ sempre continua insieme con la sua derivata parziale $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, e tale che, in A, sia sempre

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}?$$

l. t.

9. Considerato un integrale

$$I[y(x)] \equiv \int_b^a [f(x, y(x), y'(x)]dx,$$

con $f(x, y, y')$ funzione sempre continua, insieme con le sue derivate parziali del 1° ordine, nel campo definito dalle

$$a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty,$$

e supposto che, per una data $y_0(x)$, assolutamente continua in (a, b), la $f[x, y_0(x), y_0'(x)]$ risulti integrabile in (a, b), è possibile, preso ad arbitrio in $\varepsilon > 0$, di determinare sempre una funzione $y(x)$, assolutamente continua in (a, b), e tale che:

1°) la sua derivata $y'(x)$ — considerata solo là dove esiste — risulti limitata;

2°) sia, in tutto (a, b),

$$|y_0(x) - y(x)| < \varepsilon;$$

3°) sia

$$|I[y_0(x)] - I[y(x)]| < \varepsilon?$$

È possibile, inoltre, di imporre alla $y(x)$ di soddisfare anche alle uguaglianze

$$y_0(a) = y(a), \quad y_0(b) = y(b)?$$

l. t.