Bollettino Unione Matematica Italiana

Umberto Puppini

Variazioni di temperatura entro masse murarie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.2-3, p. 53–57.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_2-3_53_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1922.

Variazioni di temperatura entro masse murarie.

Nota di UMBERTO PUPPINI

1. Le variazioni della temperatura entro una massa muraria di spessore s limitata da due superficie piane indefinite parallele, su ognuna delle quali la temperatura abbia una distribuzione uniforme ma non costante, si possono studiare partendo dalla stessa equazione differenziale da cui si parte per lo studio delle variazioni di temperatura nei suoli di profondità indefinita.

Indicando con:

u la temperatura,

t il tempo,

K il coefficiente di conducibilità termica della massa supposta omogenea e isotropa,

C il calore specifico della massa per unità di volume,

x la distanza normale di un punto generico entro la massa da una delle superficie limiti (x variabile da zero ad s),

l'equazione differenziale, che collega le variazioni della temperatura nel tempo alle variazioni di essa nello spazio, è la seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

in cui è posto $a^2 = \frac{K}{C}$.

2. Quando le cause della variazione di temperatura da punto a punto della massa e da momento a momento siano semplicemente le oscillazioni annue e diurne della temperatura negli ambienti esterni (aria atmosferica, acqua, terreno, a seconda del collocamento della massa muraria), allora il problema può ricondursi, in forza della dipendenza lineare fra flussi di calore e cadute di temperatura, alla sovrapposizione di problemi semplici consistenti nel supporre temperatura costante nulla sopra una delle superficie limiti e temperatura oscillante sinussoidalmente attorno al valore nullo sull'altra superficie.

Si porrà allora, per $x = 0$, $u = u_0 \operatorname{sen} \omega t$, con $\omega = \frac{2\pi}{T}$, essendo T il periodo della oscillazione completa, e, per $x = s$, $u = 0$.

3. E si osserverà che, qualunque siano state le condizioni iniziali, la temperatura finirà col divenire, in ogni punto del mezzo, oscillante con legge sinussoidale di frequenza ω, per quanto con ampiezza e con fase diverse da quelle date per $x=0$.

Si potrà perciò assumere genericamente:

$$u = U \operatorname{sen}(\omega t - \varphi), \tag{2}$$

con U e φ funzioni di x; o anche:

$$u = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t, \tag{3}$$

con $A = U \cos\varphi$, $B = -U \operatorname{sen}\varphi$, $U = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\varphi = -\operatorname{arc\,tang} \frac{B}{A}$.

Eseguendo sulla (3) la $\frac{\partial u}{\partial t}$ e la $\frac{\partial u^2}{\partial x^2}$ e sostituendo nella (1), e osservando che la equazione che ne segue deve essere verificata tanto per $\operatorname{sen} \omega t = 0$, quanto per $\cos \omega t = 0$, si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 A}{dx^2} + 2\mu^2 B = 0 \\ &\frac{d^2 B}{dx^2} - 2\mu^2 A = 0, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

essendosi posto $\mu = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}$.

Dalla (4) si ricava, eliminando B:

$$\frac{d^4 A}{dx^4} + 4\mu^4 A = 0, \tag{5}$$

da cui integrando:

$$A = e^{-\mu x}\{M \cos \mu x - N \operatorname{sen} \mu x\} + e^{-\mu x}\{M' \cos \mu x + N' \operatorname{sen} \mu x\}, \tag{6}$$

con M, N, M', N' costanti da determinarsi a mezzo delle condizioni limiti.

E analogamente si ha:

$$B = -\left[e^{-\mu x}\{N \cos \mu x + M \operatorname{sen} \mu x\} + e^{\mu x}\{N' \cos \mu x - M' \operatorname{sen} \mu x\}\right]. \tag{7}$$

Sostituendo i valori (6) e (7) di A e di B nella equazione (3) e utilizzando le date condizioni limiti, si ottiene:

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
M &= u_0 \frac{e^{2\mu s} - \cos 2\mu s}{e^{-2\mu s} + e^{2\mu s} - 2\cos 2\mu s} \\
N &= u_0 \frac{\operatorname{sen} 2\mu s}{e^{-2\mu s} + e^{2\mu s} - 2\cos 2\mu s} \\
M' &= u_0 \frac{e^{-2\mu s} - \cos 2\mu s}{e^{-2\mu s} + e^{2\mu s} - 2\cos 2\mu s} \\
N' &= -u_0 \frac{\operatorname{sen} 2\mu s}{e^{-2\mu s} + e^{2\mu s} - 2\cos 2\mu s}.
\end{aligned}
\right.
$$

I valori (8) e le formule (6), (7) e (3) danno la risoluzione completa del problema proposto, cioè offrono in termini finiti la legge di variazione della temperatura da punto a punto e da momento a momento nella massa muraria.

4. Conviene di vedere la forma particolare assunta dalla soluzione del problema per due casi limiti, cioè per $2\mu s$ piccolissimo e per $2\mu s$ grandissimo.

L'espressione dei valori (8), per $2\mu s$ così piccolo che si possano trascurare i termini di grado superiore al secondo negli sviluppi in serie delle funzioni esponenziali e circolari contenuti nei numeratori e nei denominatori delle (8), è data da:

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
M &= u_0 \frac{1 + 2\mu s}{4\mu s} \\
N &= \frac{1}{4\mu s} \\
M' &= u_0 \frac{-1 + 2\mu s}{4\mu s} \\
N' &= -\frac{1}{4\mu s}.
\end{aligned}
\right.
$$

Sostituiti questi valori (9) nelle (6), (7), nelle quali si pongano gli sviluppi in serie di $e^{\mu x}$, $e^{-\mu x}$, $\operatorname{sen} \mu x$, $\cos \mu x$ ancora con limitazione ai termini di secondo grado, si ottiene:

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
A &= u_0 \frac{s - x}{s} \\
B &= 0,
\end{aligned}
\right.
$$

e quindi, per la (3):

$$u = u_0 \frac{s - x}{s} \operatorname{sen} \omega t. \tag{11}$$

La quale formula definisce, alla profondità generica x, una oscillazione di temperatura in fase colla $(u)_{x=0}$ e ridotta di ampiezza con legge lineare in x.

Invece: il limite dei valori (8), per $2\mu s$ tendente all'infinito, è dato da:

$$M = u_0, \quad M' = N = N' = 0;$$

e allora la (3) prende la forma:

$$u = e^{-\mu x} \cdot u_0 \cdot \operatorname{sen}(\omega t - \mu x). \tag{12}$$

La (12) è la stessa nota formula che esprime la propagazione di una oscillazione termica dalla superficie verso l'interno di un suolo indefinito, pel quale appunto, essendo $s = \infty$, è $2\mu s = \infty$.

5. La ricerca sopra esposta ha particolare interesse tecnico per le strutture murarie costituenti le grandi dighe a volta unica e a volte multiple innalzate per ottenere un lago artificiale collo sbarramento di una valle. Entro tali strutture le variazioni di temperatura producono notevoli tensioni, per conoscere le quali occorrerebbe conoscere, oltre che altri elementi, anche la forma della legge di variazione della temperatura da punto a punto della massa muraria.

Esaminando accuratamente i risultati sopra indicati coll'aiuto di molte specificazioni e applicazioni numeriche, si ottengono le seguenti norme di approssimazione:

1ª. Nei riguardi dell'onda termica diurna, la legge esponenziale di decrescenza dell'ampiezza con ritardo di fase uguale a μx, nota pei suoli di profondità illimitata, è accettabile per la propagazione della temperatura entro le dighe, anche che lo spessore di queste sia ridotto a poche decine di centimetri.

2ª. Nei riguardi dell'onda termica annua, dati gli usuali spessori delle volte nelle dighe a volte multiple, è accettabile per queste la variazione lineare del valore medio diurno della temperatura da punto a punto dello spessore della volta, senza ritardi di fase.

3ª. Ancora nei riguardi dell'onda termica annua, per le dighe che con una unica volta sbarrino la valle, si possono presentare come applicabili le due leggi estreme, in alcuni casi la lineare, in altri casi la esponenziale, ma è più frequente di dover adottare la legge generale.

E precisamente: i valori di spessori espressi in centimetri, che delimitano in via approssimata i campi di applicabilità delle suddette leggi, sono riassunti nella seguente tabella per diversi valori di K espressi in unità centigrado-centimetro-caloria di grammo-secondo:

	legge lineare	legge generale	legge esponenziale
$K = 0{,}002$	$s < 150$	$150 < s < 600$	$s > 600$
$K = 0{,}004$	$s < 210$	$210 < s < 850$	$s > 850$
$K = 0{,}006$	$s < 260$	$260 < s < 1050$	$s > 1050.$

Bologna, novembre 1922.