Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giuseppe Vitali

Sulla rettificazione delle curve

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (1922), n.2-3, p. 47–49.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1922_1_1_2-3_47_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1922.

Sulla rettificazione delle curve.

Nota di Giuseppe Vitali

§ 1. È noto che, se

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

sono le equazioni di una curva C continua del piano, *condizione necessaria e sufficiente perchè* C *sia rettificabile è che le* x(t), y(t) *siano a variazione limitata* (1) e che *se* C *è rettificabile, ed* $s = s(t)$ *è la lunghezza dell'arco di* C *che va dall'origine* $[x = x(t_0), y = y(t_0)]$ *al punto generico* $[x = x(t), y = y(t)]$, *le* x *e* y *sono funzioni continue di* s (2).

Inoltre si sa che *condizione necessaria e sufficiente perchè* $s = s(t)$ *sia assolutamente continua è che lo siano* x(t), y(t) (3).

Allora se C è rettificabile, esprimendo le coordinate dei suoi punti in funzione di s (cosicchè $s = t$), poichè $s = t$ è assolutamente continua, la $x(s)$ e la $y(s)$ lo sono pure, ossia:

Se C *è una curva continua e rettificabile, le coordinate dei suoi punti sono funzioni assolutamente continue dell'arco, e quindi se* C *è una curva continua rettificabile, è sempre possibile scegliere il parametro* t *in modo che, essendo* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *le equazioni della curva, le funzioni* x(t), y(t) *siano assolutamente continue.*

(1) V. per es. L. Tonelli, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*. N. Zanichelli, Bologna, § 8, pag. 44 e seg.
(2) L. Tonelli, l. c., § 8, pag. 45.
(3) L. Tonelli, l. c., § 17, pag 67.

Ciò ha importanza in quanto che *condizione necessaria e sufficiente perchè, essendo C rettificabile, sia*

$$s = \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

è che le x(t), y(t) *siano assolutamente continue* (1).

Ora se C è continua e rettificabile e

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

sono le sue equazioni, con $x(t)$, $y(t)$ necessariamente a variazione limitata, e se $X(t)$ e $Y(t)$ sono le variazioni totali di $x(t)$ e $y(t)$ da t_0 a t, la funzione

$$\tau = X(t) + Y(t)$$

è continua e non decrescente.

Tenendo conto del fatto che, se a due valori t', t'' del parametro t corrispondono due punti P', P'' che occupano la stessa posizione nel piano, questi punti si considerano come uguali se e soltanto se a tutti i valori di t compresi fra t' e t'' corrispondono punti che occupano lo stesso posto di P' e P'' (2), si vede subito che ad ogni punto di C corrisponde *un* valore di τ e a punti differenti valori differenti e viceversa, così che le x, y risultano funzioni continue di τ nell'intervallo da $\tau_0 = X(t_0) + Y(t_0)$ a $\tau_1 = X(t_1) + Y(t_1)$.

Se risulta

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau),$$

le funzioni $\varphi(\tau)$ e $\psi(\tau)$ sono assolutamente continue di τ, perchè ad ogni incremento di τ corrisponde un incremento non maggiore di X e Y e quindi di x e y, e perciò basta che un gruppo di intervalli di (τ_0, τ_1) sia di lunghezza complessiva minore di un $\varepsilon > 0$ qualsiasi, perchè la somma dei moduli delle variazioni di x, e quelle dei moduli delle variazioni di y in questi intervalli siano minori di ε.

Così si può realizzare la rappresentazione di una curva C continua e rettificabili mediante due equazioni

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

con $x(t)$ e $y(t)$ assolutamente continue, senza ricorrere alla preven-

(1) V. L. Tonelli, § 65, pag. 182-83.
(2) V. L. Tonelli, l. c., § 2, pag. 34.

tiva rettificazione dell'arco. Questa rettificazione può essere poscia eseguita applicando il teorema già citato [1].

§ **2.** La rettificazione delle curve continue, rettificabili è dunque ricondotta alle operazioni seguenti.

1°. Calcolo della variazione totale di una funzione a variazione limitata.

2°. Derivazione di una funzione assolutamente continua.

3°. Integrazione di una funzione sommabile.

4°. Invertibilità di una funzione non decrescente [2].

Sulle ultime tre specie di operazioni non vi è nulla di notevole da osservare, poichè si è abituati a considerare come risoluti i problemi che si riconducono ad esse.

Circa la prima opèrazione si osserva che si può considerare anch'essa come una operazione elementare del Calcolo. In certi casi essa si eseguisce immediatamente. Così se $f(x)$ è una funzione monotona in (a, b), per ogni x, per cui $a \leq x \leq b$, la variazione di $f(x)$ in (a, x) è uguale ad $|f(x) - f(a)|$.

Per le funzioni continue si può poi dire che la *variazione è uniforme*, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un segmento τ tale che quando si divide l'intervallo (a, b) in parti $< \tau$ la somma dei moduli delle variazioni della funzione nei singoli tratti differisce dalla variazione totale per meno di ε [3]. Quindi per avere la variazione totale in (a, x) di una funzione continua $f(x)$ basta dividere (a, x) in 2, 4, 8, 16,.... 2^n.... parti uguali, per ciascuna di queste divisioni calcolare la somma dei moduli degli incrementi di $f(x)$ nei singoli tratti e poi trovare il limite (che è certo limite superiore) della successione di somme trovate.

Un tal procedimento non si può certamente considerare più penoso di quello che possa essere quello per il calcolo dell'integrale di una funzione sommabile generica.

Noto infine che nel problema trattato nella prima parte le variazioni totali da calcolarsi sono di funzioni continue.

Genova, 10 settembre 1922.

(1) V. L. Tonelli, l. c., § 65, pag. 183.

(2) Se la funzione non decrescente $\tau = X(t) + Y(t)$ ha tratti costanti, tutti i valori di t di un tale tratto si fanno corrispondere al medesimo valore di τ.

(3) V. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Paris, Gauthier-Villars, 1904, pag. 52.